



Zastosowanie różnicowego układu obserwacyjnego typu Schreibera do opracowania sesji pomiarów statycznych GPS

ROMAN KADAJ

Politechnika Rzeszowska, Katedra Geodezji im. K. Weigla, 35-959 Rzeszów, ul. W. Pola 2

Streszczenie. Praca przedstawia nowe algorytmy dla względnego pozycjonowania GPS, oparte na zbiorach różnic fazowych typu Schreibera. Tradycyjne procedury, stosujące podwójne lub potrójne różnicowanie faz i ścisłe modele stochastyczne w estymacji najmniejszych kwadratów, wymagają wyznaczenia odwrotności (inwersji) niediagonalnej i zazwyczaj znacznych rozmiarów macierzy kowariancyjnej. Finalnym produktem inwersji jest pełna (niediagonalna) macierz wagowa.

Koszt kompletnego rozwiązania staje się bardzo znaczący w przypadku wielopunktowych sesji GPS i przy stosowaniu potrójnego różnicowania faz. Formułując zbiór różnic typu Schreibera, otrzymujemy estymację najmniejszych kwadratów z diagonalną macierzą wagową. Estymatory są identyczne z zadaniem oryginalnym. Użyteczne cechy algorytmów są teoretycznie dowiedzione. Algorytmy zostały zaimplementowane w profesjonalnych programach dla GPS, m.in. w module automatycznego *post-processingu* (APPS) w systemie stacji referencyjnych ASG-EUPOS w Polsce.

Słowa kluczowe: względne pozycjonowanie GPS, *post-processing*, podwójne różnice faz, potrójne różnice faz, diagonalna macierz wagowa, zbiór różnic typu Schreibera, wielopunktowa sesja GPS, wielobazowa sesja GPS, automatyczny *post-processing*, ASG-EUPOS

Symbole UKD: 527

1. Wprowadzenie

W metodologii względnego pozycjonowania w oparciu o obserwacje fazowe GPS, niemal jako priorytetowe przyjmuje się rozwiązanie numeryczne oparte na podwójnym różnicowaniu faz. Jak wiadomo, wiąże się to z koniecznością identyfikacji, obok składowych wektora GPS, dodatkowych niewiadomych w postaci pewnych liniowych funkcji nieoznaczoności (ang. *ambiguities*) — całkowitych

wielokrotności długości fali emitowanego sygnału. Trzeba podkreślić, że skuteczność tej standardowej metody względnego pozycjonowania zależy w dużej mierze od samego algorytmu identyfikacji nieoznaczoności, stanowiącego w pewnym sensie niezależny od podstawowej metody najmniejszych kwadratów jako zasady estymacji, element procesu obliczeniowego (ang. *post-processing*). Pomimo bogatego już dorobku naukowego i aplikacyjnego w zakresie metod i algorytmów identyfikacji nieoznaczoności, praktyka dostarcza przykładów (np. Rzepecka, 2004), w których taka identyfikacja jest co najmniej niedostatecznie jednoznaczna („rozmyta”). Dotyczy to różnych sytuacji ekstremalnych wynikających przykładowo z krótkich sesji obserwacyjnych i długich wektorów lub niekorzystnej konstelacji satelitów czy też relatywnie dużej liczby defektów obserwacyjnych, jak np. utraconych cykli fazowych (ang. *cycle slips*) lub przerwanych rejestracji faz. Skutkiem numerycznym jest obniżenie tzw. wskaźnika uwarunkowania układu obserwacyjnego i zwiększenie błędów standardowych szukanych nieoznaczoności.

Metoda alternatywna, wykorzystująca potrójne różnice faz, jawi się jako szczególnie atrakcyjna, gdyż w sposób naturalny (w modelu funkcjonalnym) eliminuje niewiadome nieoznaczoności i związane z tym ryzyko ich błędnej identyfikacji. Niestety, z powodu skomplikowanych modeli stochastycznych i stosowanych w tym zakresie koniecznych uproszczeń, metoda jest używana i zalecana głównie do znalezienia dobrego rozwiązania początkowego (przybliżonego). Komplikacja modelu stochastycznego polega na tym, że macierz kowariancyjna dla typowego modelu funkcjonalnego układu potrójnych różnic jest macierzą pełną (niediagonalną) o znacznych rozmiarach (stopień zależny od liczby epok), a ścisłe zastosowanie metody najmniejszych kwadratów wymaga odwracania tej macierzy (czyli wyznaczenia odpowiadającej, niediagonalnej macierzy wagowej). Eliminacja nieoznaczoności, pomimo określonych korzyści praktycznych, ma też swoją stronę negatywną, ponieważ pozbawia układ obserwacyjny ważnej topologicznie informacji o całkowitoliczbowej naturze tych wielkości, a tym samym redukuje z układu dodatkowe warunki na niewiadome. Efekt ten rekompensuje się statystycznie przez wzrost liczby obserwacji (dla sesji długich). Potrójne różnicowanie faz pomiędzy kolejnymi epokami sesji obserwacyjnej służy także do „czyszczenia” zbioru obserwacyjnego z różnego rodzaju defektów, jak np. utraconych cykli fazowych (ang. *cycle slips*), przerwanych rejestracji, błędów grubych spowodowanych innymi, niewiadomymi czynnikami. Powyższe stwierdzenia jako pewne dyrektywy można znaleźć np. w książkach: Hofmann-Wellenhof i in. (2001), Xu (2007), Leick (2004).

Tradycyjne („książkowe”) modele funkcjonalne potrójnych różnic faz stają się jeszcze bardziej skomplikowane dla wielopunktowych (wielowektorowych) sesji obserwacyjnych (ang. *multi-baseline session*). Zadanie rozwiązuje się więc zwykle przy różnego rodzaju uproszczeniach, np. pomijaniu elementów niediagonalnych macierzy kowariancyjnej. Problem skorelowania pseudoobserwacji, jakimi są różnice bezpośrednich, dyskretnych obserwacji fazowych, także z uwzględnie-

niem wielopunktowych sesji obserwacyjnych, jest podejmowany m.in. w pracach: Askenazi a. Yau (1986), Beutler, Gurtner i in. (1986), Beutler, Bauersima i in. (1987), Eren (1987).

Można powiedzieć, że skorelowanie jest pewnym kosztem stosowania różnic oryginalnych obserwacji fazowych, ale różnicowanie spełnia z drugiej strony znaną skądinąd w geodezji funkcję eliminowania pewnych błędów systematycznych, a w omawianym przypadku także „zbędnych” dla finalnego celu niewiadomych (ang. *nuisance parameters*), jakimi są w naszym przypadku: przesunięcia czasu zegarów (satelitów i odbiorników), nieoznaczoności cykli fazowych. W związku z problemem skorelowania proponuje się także powrót do oryginalnego układu obserwacji nieróżnicowych, natomiast zbędne niewiadome eliminuje się drogą algebraiczną tak, by powstały układ zachowywał niezmienny w stosunku do oryginalnego wektor obserwacji i niezmienną diagonalną macierz wagową. Problematyka zastosowania nieróżnicowych obserwacji GPS jest treścią wielu publikacji, m.in.: Lindlohr, Wells (1985), Xu (2007).

W niniejszej pracy wykazemy, że również dla obserwacji różnicowych problem skorelowania może być rozwiązany tak, że przy zachowaniu pełnej ścisłości modelu stochastycznego (bez uproszczeń) będziemy bazować na diagonalnej macierzy wagowej tych obserwacji. W szczególności może dotyczyć to układu potrójnych różnic faz i wielopunktowych sesji obserwacyjnych. Istota metody polega na utworzeniu zbioru różnic we wszystkich kombinacjach par obserwacji oryginalnych. Sięgając do klasyki geodezji, można powiedzieć, że zbiór taki jest analogią układu kątów mierzonych na stacji obserwacyjnej pomiędzy wszystkimi parami kierunków (metoda Schreibera: Schreiber, 1878). Zastosowana w tej pracy konstrukcja modelu funkcjonalnego będzie się więc kojarzyć z tworzeniem układu obserwacji różnicowych typu Schreibera. Najważniejszą własność takiego układu polega na tym, że jego wyrównanie metodą najmniejszych kwadratów sprowadza się do zastosowania pewnej ściśle diagonalnej macierzy wagowej. Powyższe stwierdzenie może wydawać się paradoksalne, wobec oczywistego skorelowania pojedynczych par obserwacji różnicowych, ale już we wstępnym „ogłądzie” problemu można zauważyć, że układ Schreibera tworzy równania wzajemnie zależne z osobliwą macierzą kowariancyjną, czyli nieposiadającą zwykłej odwrotności. Rozwiązanie takiego układu, przy założeniu równoważności z układem pierwotnym (nieróżnicowym), prowadzi jednak ściśle do diagonalnej macierzy wagowej, o czym orzeka podstawowe twierdzenie sformułowane i dowiedzione w p. 2.2 niniejszej pracy. W pierwotnej wersji twierdzenie było przedstawione w referacie Kadaj (2006).

Idea metody, oparta na układzie typu Schreibera potrójnych różnic fazowych, jest podstawą aplikacji w algorytmach *post-processingu* GPS — Kadaj (2007), a w szczególności tzw. *post-processingu automatycznego* w module systemu ASG-EUPOS — Kadaj i Świętoń (2008).

2. Twierdzenia o własności układu obserwacji różnicowych typu Schreibera

2.1. Założenia pierwotne

Obserwacje różnicowe tworzy się zwykle w celu wyeliminowania pewnych nieistotnych, z punktu widzenia zastosowania, niewiadomych układu obserwacyjnego lub w analogicznym sensie — pewnych błędów systematycznych. Przykładem klasycznym może być eliminowanie stałej orientacji pęku kierunków na stacji obserwacyjnej, poprzez obliczanie miar kątów jako różnic obserwacji kierunkowych. W algorytmach *post-processingu* GPS, podwójne różnicowanie faz eliminuje niewiadome offsety zegarowe satelitów i odbiorników, zaś różnicowanie potrójne — niewiadome liniowe kombinacje nieoznaczoności. Wśród dowolnych układów różnic obserwacji wyróżnimy układ zupełny, typu Schreibera, obejmujący wszystkie kombinacje par obserwacji, dowodząc sygnalizowanych już własności.

Założymy najpierw, że oryginalny (przed różnicowaniem) układ obserwacyjny lub w ogólności tylko pewna część większego (zintegrowanego) układu obserwacyjnego ma postać:

$$\mathbf{L} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{J} \cdot y = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{X}}, \quad (1)$$

$$\underline{\mathbf{A}} = [\mathbf{A}, \mathbf{J}]; \quad \underline{\mathbf{X}} = [\mathbf{X}^T, y]^T,$$

gdzie: $\mathbf{L} = [L_i]$ — wektor obserwacji o liczbie m składowych;
 $\mathbf{X} = [X_j]$ — niewiadomy wektor parametrów o liczbie n składowych;
 y — niewiadoma wielkość skalarna (np. błąd systematyczny);
 $\mathbf{A} = [A_{ij}]$ — macierz współczynników o rozmiarze $(m \times n)$;
 \mathbf{J} — kolumna jedynek: $[1, 1, \dots, 1]^T$;
 $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_i]$ — wektor błędów obserwacji z następującym modelem stochastycznym a priori:
 $E\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \mathbf{0}$ (zerowa wartość oczekiwana);
 $\mathbf{C} = E\{\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T\} = \text{diag}[\sigma_i^2]$ (diagonalna macierz kowariancyjna);
 σ_i — odchylenie standardowe ($i = 1, 2, \dots, m$).

Jeśli do układu (1) zastosujemy nieobciążoną estymację najmniejszych kwadratów, wówczas otrzymamy następujący układ równań normalnych (sumowany ewentualnie z układem równań normalnych pozostałej części szerszego/zintegrowanego systemu obserwacyjnego):

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^\wedge + \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \cdot y^\wedge = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{L},$$

$$\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^\wedge + m \cdot y^\wedge = \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{L}, \quad (2)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1} \text{ (macierz wagowa),}$$

gdzie $\mathbf{X}^\wedge, y^\wedge$ oznaczają odpowiednie estymatory niewiadomych \mathbf{X}, y . Równoległe z (2) otrzymujemy następujące zależności kontrolne:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{0} \text{ oraz } \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{V} = \sum_{i=1}^m p_i \cdot v_i = 0, \quad (3)$$

gdzie $\mathbf{V} = [v_i]$ (wektor poprawek) oznacza także estymator \mathbf{e}^\wedge wektora błędów \mathbf{e} ; p_i — wagi obserwacji, które w świetle przyjętych już oznaczeń są wyrażone wzorem: $p_i = 1/\sigma_i^2$.

Tworzymy następnie układ równań różnicowych typu Schreibera:

$$L_i - L_j + v_i - v_j = \sum_{k=1}^n [(A_{ik} - A_{jk}) \cdot x_k^\wedge] \quad (4)$$

dla $i < j$ oraz $i, j = 1, 2, \dots, m$ (rys. 1) lub w odpowiadającej postaci macierzowej:

$$\delta \mathbf{L} + \delta \mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{X}^\wedge, \quad (4a)$$

gdzie: $\delta \mathbf{L} = [\delta L_{ij}] = [L_i - L_j]_{(u \times 1)}$; $\delta \mathbf{v} = [\delta v_{ij}] = [v_i - v_j]_{(u \times 1)}$;

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	x	x	x	x	.	.	.
2		0	x	x	x	.	.	.
3			0	x	x	.	.	.
4				0	x	.	.	.
5					0	.	.	.
.						.	.	.
.						.	.	.
.						.	.	.

Rys. 1. Symboliczny plan różnic w układzie Schreibera

$u = m \cdot (m - 1)/2$ — liczba różnic w układzie Schreibera;

$\mathbf{a} = [(A_{ik} - A_{jk})]_{(u \times n)}$ — macierz współczynników.

Sformułujemy teraz kilka twierdzeń opisujących własności układu różnicowego tego typu, a następnie przeprowadzimy ich dowody.

Niech

$$\varphi(\mathbf{X}^\wedge; y^\wedge) = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}; \quad \mathbf{V} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^\wedge + \mathbf{J} \cdot y^\wedge - \mathbf{L}, \quad (5)$$

znaczy wartość funkcji celu najmniejszych kwadratów dla oryginalnego zadania (2), (3) i estymatorów $\mathbf{X}^\wedge, y^\wedge$ niewiadomych \mathbf{X}, y .

2.2. Twierdzenie (A) o równoważności układu różnic Schreibera z układem oryginalnym (nieróżnicowym) w warunkach użycia metody najmniejszych kwadratów z diagonalną macierzą wagową

Teza A1: Istnieje macierz diagonalna \mathbf{W} taka, że funkcja

$$\psi(\mathbf{X}) = \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \delta \mathbf{v}; \quad \delta \mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{X} - \delta \mathbf{L} \quad (6)$$

spełnia równość:

$$\varphi(\mathbf{X}^\wedge; y^\wedge) = \psi(\mathbf{X}^\wedge). \quad (7)$$

Teza A2: Macierz diagonalna \mathbf{W} spełniająca tezę A1 jest wyrażona następująco:

$$\mathbf{W} = \text{diag} [w_k] - (u \times u) \text{ macierz diagonalna} \quad (8)$$

$$w_k = p_i \cdot p_j \cdot c^{-1}; \quad c = \sum_{i=1}^m p_i, \quad (8a)$$

gdzie: p_i — waga oryginalnej obserwacji, k — wskaźnik kolejnych elementów zbioru par wskaźników (i, j) tworzących układ różnicowy Schreibera:

$$k = (2 \cdot m - i - 2) \cdot (i - 1)/2 + j - i, \quad (8b)$$

$$i = 1, 2, \dots, m - 1; \quad j = i + 1, i + 2, \dots, m.$$

Dla kolejnych par (i, j) :

$$\begin{array}{cccc} (1, 2), & (1, 3), & \dots, & (1, m), \\ & (2, 3), & \dots, & (2, m), \\ & & \dots & \dots \\ & & \dots, & (m - 1, m) \end{array}$$

wskaźnik k przyjmuje wartości:

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & \dots, & m - 1, \\ & m, & m + 1, & \dots, & 2m - 3, \\ & & 2m - 2 & \dots, & 3m - 5, \\ & & & \dots & \dots \end{array}$$

$$u = m(m - 1)/2.$$

Teza A3: Estymata \mathbf{X}^\wedge jest również punktem ekstremalnym funkcji celu zawierającej komponent $\psi(\mathbf{X})$.

Dowód twierdzenia

Dla dowodu tez A1, A2 zamienimy najpierw równość (7) na postać skalarną z uwzględnieniem wag (8a). Sprowadza się to do wykazania, że:

$$c^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m (v_i - v_j)^2 \cdot p_i \cdot p_j = \sum_{i=1}^m v_i^2 \cdot p_i \quad \text{gdzie } c = \sum_{i=1}^m p_i \quad (9)$$

Uwzględniając oczywiste zależności:

$$(v_i - v_i)^2 \cdot p_i^2 = 0 \quad (\text{zerowa różnica tych samych obserwacji}),$$

$$(v_i - v_j)^2 \cdot p_i \cdot p_j = (v_j - v_i)^2 \cdot p_j \cdot p_i \quad (\text{symetria}),$$

$$\sum_{i=1}^m v_i \cdot p_i = 0 \quad (\text{z warunku minimum najmniejszych kwadratów — wzór (3)}),$$

przekształcamy lewą stronę równości (9), dochodząc w efekcie do wykazania tez A1, A2:

$$\begin{aligned} c^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m (v_i - v_j)^2 \cdot p_i \cdot p_j &= (1/2) \cdot c^{-1} \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (v_i - v_j)^2 \cdot p_i \cdot p_j = \\ &= (1/2) \cdot c^{-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m v_i^2 \cdot p_i \cdot p_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m v_j^2 \cdot p_i \cdot p_j - 2 \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m v_i \cdot v_j \cdot p_i \cdot p_j \right) = \\ &= (1/2) \cdot c^{-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^m v_i^2 \cdot p_i \cdot \sum_{j=1}^m p_j + \sum_{j=1}^m v_j^2 \cdot p_j \cdot \sum_{i=1}^m p_i - 2 \cdot \sum_{i=1}^m v_i \cdot p_i \cdot \sum_{j=1}^m v_j \cdot p_j \right) = \\ &= (1/2) \cdot c^{-1} \cdot \left(2 \cdot \sum_{i=1}^m v_i^2 \cdot p_i \cdot c - 2 \cdot \sum_{i=1}^m v_i \cdot p_i \cdot \sum_{j=1}^m v_j \cdot p_j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m v_i^2 \cdot p_i - c^{-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^m v_i \cdot p_i \right)^2 = \sum_{i=1}^m v_i^2 \cdot p_i - c^{-1} \cdot 0 = \sum_{i=1}^m v_i^2 \cdot p_i. \end{aligned} \quad (10)$$

Wykażemy teraz końcową tezę A3 orzekającą, że \mathbf{X}^\wedge jako wynik rozwiązania oryginalnego jest również rozwiązaniem ekstremalnym dla układu równań różnicowych typu Schreibera. Dla dowodu wystarczy wykazać, że jest spełnione odpowiadające równanie normalne $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{X}^\wedge - \delta \mathbf{L}) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \delta \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ze względu na liniowość układu obserwacyjnego co najwyżej tylko jeden punkt stacjonarny). Wybieramy zatem dowolne k -te równanie, zapisane w postaci skalarnej $N_k = 0$, rozwijając jego lewą stronę. Uwzględniając dodatkowo oczywiste zależności:

$$(A_{ik} - A_{ik}) \cdot p_i \cdot p_i \cdot (v_i - v_i) = 0$$

oraz $(A_{ik} - A_{jk}) \cdot p_i \cdot p_j \cdot (v_i - v_j) = (A_{jk} - A_{ik}) \cdot p_j \cdot p_i \cdot (v_j - v_i)$ (symetria), otrzymamy:

$$\begin{aligned}
c \cdot N_k &= (\frac{1}{2}) \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (A_{ik} - A_{jk}) \cdot p_i \cdot p_j \cdot (v_i - v_j) = \\
&= (\frac{1}{2}) \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ik} \cdot p_i \cdot p_j \cdot (v_i - v_j) - (\frac{1}{2}) \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{jk} \cdot p_j \cdot p_i \cdot (v_i - v_j) = \\
&= (\frac{1}{2}) \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ik} \cdot p_i \cdot p_j \cdot (v_i - v_j) + (\frac{1}{2}) \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{jk} \cdot p_j \cdot p_i \cdot (v_j - v_i) = \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ik} \cdot p_i \cdot p_j \cdot (v_i - v_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ik} \cdot p_i \cdot p_j \cdot v_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ik} \cdot p_i \cdot p_j \cdot v_j = \\
&= \sum_{i=1}^m A_{ik} \cdot p_i \cdot v_i \cdot \sum_{j=1}^m p_j - \sum_{i=1}^m A_{ik} \cdot p_i \cdot \sum_{j=1}^m p_j \cdot v_j = \\
&= \sum_{i=1}^m A_{ik} \cdot p_i \cdot v_i \cdot c - \sum_{i=1}^m A_{ik} p_i \cdot 0. \tag{11}
\end{aligned}$$

Zatem $N_k = \sum_{i=1}^m A_{ik} \cdot p_i \cdot v_i = 0$, ponieważ $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{0}$, więc ostatecznie musi być też $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \delta \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

2.3. Twierdzenie (B) o własnościach i formułach macierzy kowariancyjnych dla wektora różnic Schreibera i wektora niewiadomych

Niech macierz kowariancyjna układu różnic obserwacji typu Schreibera ma ogólną postać

$$\mathbf{C}_{\delta \mathbf{L}} = [C_{g,h}]_{(u \times u)}, \tag{12}$$

gdzie wskaźniki $g, h = 1, 2, \dots, u$ są przyporządkowane parom wskaźników (i_1, j_1) , (i_2, j_2) w planie różnic Schreibera, według wzoru (8a):

$$g = (2 \cdot m - i_1 - 2) \cdot (i_1 - 1)/2 + j_1 - i_1$$

$$\text{dla } i_1 = 1, 2, \dots, m - 1; \quad j_1 = i_1 + 1, i_1 + 2, \dots, m,$$

$$h = (2 \cdot m - i_2 - 2) \cdot (i_2 - 1)/2 + j_2 - i_2$$

$$\text{dla } i_2 = 1, 2, \dots, m - 1; \quad j_2 = i_2 + 1, i_2 + 2, \dots, m.$$

Teza B1: Elementy macierzy $C_{\delta L}$ wyrażają się wzorem:

$$\begin{aligned}
 C_{gh} &= p_{i1}^{-1} + p_{j1}^{-1} = p_{i2}^{-1} + p_{j2}^{-1} && \text{jeśli } (i1 = i2) \wedge (j1 = j2) \text{ (inaczej: } g = h) \\
 p_{i1}^{-1} &= p_{i2}^{-1} && \text{jeśli } (i1 = i2) \wedge (j1 \neq j2) \\
 p_{j1}^{-1} &= p_{j2}^{-1} && \text{jeśli } (i1 \neq i2) \wedge (j1 = j2) \\
 -p_{i1}^{-1} &= -p_{j2}^{-1} && \text{jeśli } (i1 = j2) \wedge (j1 \neq i2) \\
 -p_{j1}^{-1} &= -p_{i2}^{-1} && \text{jeśli } (i1 \neq j2) \wedge (j1 = i2) \\
 &0 && \text{w pozostałych przypadkach.}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Teza B2: Jeśli układ równań różnicowych (4), (4a) ma rozwiązanie najmniejszych kwadratów:

$$X^{\wedge} = (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{a})^{-1} \cdot \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \delta L \tag{14}$$

(zadanie może być łatwo uogólnione w sytuacji, gdy równania (5) wyrażają tylko pewien podzbiór szerszego układu obserwacyjnego), to teoretyczna macierz kowariancyjna takiego rozwiązania C_X (macierz kofaktorów) spełnia zależność:

$$C_X = (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{a})^{-1} \cdot \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{W} \cdot C_{\delta L} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{a})^{-1} = (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{a})^{-1}. \tag{15}$$

Oznacza to, że aby wyznaczyć macierz kowariancyjną niewiadomych, wystarczy wykorzystać tę samą diagonalną macierz wagową \mathbf{W} , którą zastosowano w funkcji celu najmniejszych kwadratów — twierdzenie A. Inaczej mówiąc, w żadnym przypadku nie trzeba poszukiwać odwrotności (pseudoodwrotności) niediagonalnej macierzy kowariancyjnej $C_{\delta L}$. Nawiasem mówiąc, macierz $C_{\delta L}$ jest osobliwa, ponieważ $u - (m - 1)$ równań różnicowych w układzie Schreibera są liniowymi kombinacjami pierwszych $m - 1$ równań. Fakt liniowej zależności równań wykorzystuje się do dowodu, że $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{W} \cdot C_{\delta L} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{a}$, a tym samym do dowodu równości (15).

Dowód twierdzenia

Oznaczmy $\mathbf{e} = [(\varepsilon_i - \varepsilon_j)]_{[u \times 1]}$ wektor błędów odpowiadający wektorowi różnic obserwacji δL . Macierz kowariancyjna $C_{\delta L} = E\{\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T\}$ w świetle przyjętych już definicji i oznaczeń ma elementy określone następująco:

$$C_{(p,q)} = E\{(\varepsilon_{i1} - \varepsilon_{j1}) \cdot (\varepsilon_{i2} - \varepsilon_{j2})\} = E\{\varepsilon_{i1} \cdot \varepsilon_{i2} - \varepsilon_{i1} \cdot \varepsilon_{j2} - \varepsilon_{j1} \cdot \varepsilon_{i2} + \varepsilon_{j1} \cdot \varepsilon_{j2}\}. \tag{16}$$

Uwzględniając, że: $E\{\varepsilon_i^2\} = \mu_i^2 = p_i^{-1}$ oraz jeśli $i \neq j$: $E\{\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j\} = 0$, otrzymamy elementy określone zgodnie z tezą B1.

Oznaczmy pomocniczo: $\mathbf{F} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{C}_{\delta L} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{a}$ i $\mathbf{B} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{a}$. Dowodzimy, że $\mathbf{F} = \mathbf{B}$. Korzystając z ogólnej definicji macierzy kowariancyjnej $\mathbf{C}_{\delta L}$, przekształcimy macierz \mathbf{F} do postaci $\mathbf{F} = \mathbf{E} \{ \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{a} \} = \mathbf{E} \{ \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}^T \}$, gdzie $\mathbf{d} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}$ oraz $\mathbf{z} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{d}$ są odpowiednio do oznaczenia wektorami losowymi. Biorąc następnie elementy macierzy wagowej \mathbf{W} oraz elementy macierzy współczynników \mathbf{a} , wyrazimy wektory \mathbf{d} , \mathbf{s} w postaci:

$$\mathbf{d} = [d_k]_{(u \times 1)}, \quad d_k = c^{-1} \cdot p_i \cdot p_j \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_j), \quad k = (2 \cdot m - i - 2) \cdot (i - 1) / 2 + j - i, \quad (17)$$

$$\mathbf{z} = [z_r]_{(n \times 1)}, \quad z_r = c^{-1} \cdot \sum_{i,j} p_i \cdot p_j \cdot (A_{ir} - A_{jr}) \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_j), \quad (18)$$

$$c = \sum_{i=1}^m p_i,$$

n — liczba niewiadomych, m — liczba obserwacji przed różnicowaniem, u — liczba różnic obserwacji w układzie Schreibera.

Oznaczmy $\mathbf{F} = [F_{gh}]_{(n \times n)}$, $\mathbf{B} = [B_{gh}]_{(n \times n)}$. Element F_{gh} macierzy \mathbf{F} będzie określony następująco:

$$\begin{aligned} F_{gh} &= c^{-2} \cdot E \{ [\sum_{i_1, j_1} p_{i_1} \cdot p_{j_1} \cdot (A_{i_1, g} - A_{j_1, g}) \cdot (\varepsilon_{i_1} - \varepsilon_{j_1})] \cdot [\sum_{i_2, j_2} p_{i_2} \cdot p_{j_2} \cdot (A_{i_2, h} - A_{j_2, h}) \\ &\cdot (\varepsilon_{i_2} - \varepsilon_{j_2})] \} = c^{-2} \cdot \sum_{i_1, j_1} \sum_{i_2, j_2} p_{i_1} \cdot p_{j_1} \cdot p_{i_2} \cdot p_{j_2} \cdot (A_{i_1, g} - A_{j_1, g}) \cdot (A_{i_2, h} - A_{j_2, h}) \cdot \\ &E \{ (\varepsilon_{i_1} - \varepsilon_{j_1}) \cdot (\varepsilon_{i_2} - \varepsilon_{j_2}) \}. \end{aligned} \quad (19)$$

Na podstawie tezy B1 wartości oczekiwane $E \{ (\varepsilon_{i_1} - \varepsilon_{j_1}) \cdot (\varepsilon_{i_2} - \varepsilon_{j_2}) \}$ równają się odpowiednim wartościom $p_{i_1}^{-1} + p_{j_1}^{-1}$, $p_{i_1}^{-1}$, $p_{j_1}^{-1}$, $-p_{i_1}^{-1}$, $-p_{j_1}^{-1}$ albo zero, dla różnych relacji par wskaźników (i_1, j_1) , (i_2, j_2) . Po redukcjach wyrazów podobnych, wiedząc, że zachodzą liniowe zależności:

$$\begin{aligned} (A_{i_1, g} - A_{j_1, g}) &= (A_{1, g} - A_{j_1, g}) - (A_{1, g} - A_{i_1, g}); \\ (A_{i_2, h} - A_{j_2, h}) &= (A_{1, h} - A_{j_2, h}) - (A_{1, h} - A_{i_2, h}) \end{aligned}$$

wykazujemy, że F_{gh} jest identyczne z odpowiadającym elementem B_{gh} :

$$\begin{aligned} F_{gh} &= c^{-2} \cdot c \cdot \sum_{i_1, j_1} p_{i_1} \cdot p_{j_1} \cdot (A_{i_1, g} - A_{j_1, g}) \cdot (A_{i_1, h} - A_{j_1, h}) = \\ &= c^{-1} \cdot \sum_{i_1, j_1} p_{i_1} \cdot p_{j_1} \cdot (A_{i_1, g} - A_{j_1, g}) \cdot (A_{i_1, h} - A_{j_1, h}) = B_{gh}. \end{aligned} \quad (19a)$$

Przykład

Zilustrujemy twierdzenie dla $m = 3$ obserwacji przed różnicowaniem i $n = 2$ niewiadomych:

$$\begin{aligned}
F_{gh} &= [1/(p_1 + p_2 + p_3)^2] \cdot [p_1 \cdot p_2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot (A_{1g} - A_{2g}) \cdot (A_{1h} - A_{2h}) \cdot (1/p_1 + 1/p_2) + \\
&+ p_1 \cdot p_3 \cdot p_1 \cdot p_3 \cdot (A_{1g} - A_{3g}) \cdot (A_{1h} - A_{3h}) \cdot (1/p_1 + 1/p_3) + \\
&p_2 \cdot p_3 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot (A_{2g} - A_{3g}) \cdot (A_{2h} - A_{3h}) \cdot (1/p_2 + 1/p_3) \\
&p_1 \cdot p_2 \cdot p_1 \cdot p_3 \cdot (A_{1g} - A_{2g}) \cdot (A_{1h} - A_{3h}) \cdot (1/p_1) + \\
&p_1 \cdot p_2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot (A_{1g} - A_{2g}) \cdot (A_{2h} - A_{3h}) \cdot (-1/p_2) + \\
&p_1 \cdot p_3 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot (A_{1g} - A_{3g}) \cdot (A_{1h} - A_{2h}) \cdot (1/p_1) + \\
&p_1 \cdot p_3 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot (A_{1g} - A_{3g}) \cdot (A_{2h} - A_{3h}) \cdot (1/p_3) + \\
&p_2 \cdot p_3 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot (A_{2g} - A_{3g}) \cdot (A_{1h} - A_{2h}) \cdot (-1/p_2) + \\
&p_2 \cdot p_3 \cdot p_1 \cdot p_3 \cdot (A_{2g} - A_{3g}) \cdot (A_{1h} - A_{3h}) \cdot (1/p_3)] = \\
&= [1/(p_1 + p_2 + p_3)^2] \cdot [p_1 \cdot p_2 \cdot (A_{1g} - A_{2g}) \cdot (A_{1h} - A_{2h}) \cdot (p_1 + p_2) + \\
&p_1 \cdot p_3 \cdot (A_{1g} - A_{3g}) \cdot (A_{1h} - A_{3h}) \cdot (p_1 + p_3) + \\
&p_2 \cdot p_3 \cdot (A_{2g} - A_{3g}) \cdot (A_{2h} - A_{3h}) \cdot (p_2 + p_3) + \\
&p_1 \cdot p_2 \cdot (A_{1g} - A_{2g}) \cdot (A_{1h} - A_{3h}) \cdot (p_3) + \\
&p_1 \cdot p_2 \cdot (A_{1g} - A_{2g}) \cdot (A_{2h} - A_{3h}) \cdot (-p_3) + \\
&p_1 \cdot p_3 \cdot (A_{1g} - A_{3g}) \cdot (A_{1h} - A_{2h}) \cdot (p_2) + \\
&p_1 \cdot p_3 \cdot (A_{1g} - A_{3g}) \cdot (A_{2h} - A_{3h}) \cdot (p_2) + \\
&p_2 \cdot p_3 \cdot (A_{2g} - A_{3g}) \cdot (A_{1h} - A_{2h}) \cdot (-p_1) + \\
&p_2 \cdot p_3 \cdot (A_{2g} - A_{3g}) \cdot (A_{1h} - A_{3h}) \cdot (p_1)] = \\
&= [1/(p_1 + p_2 + p_3)^2] \cdot (p_1 + p_2 + p_3) \cdot [p_1 \cdot p_2 \cdot (A_{1g} - A_{2g}) \cdot (A_{1h} - A_{2h}) + \\
&p_1 \cdot p_3 \cdot (A_{1g} - A_{3g}) \cdot (A_{1h} - A_{3h}) + p_2 \cdot p_3 \cdot (A_{2g} - A_{3g}) \cdot (A_{2h} - A_{3h})] = \\
&= [1/(p_1 + p_2 + p_3)] \cdot [p_1 \cdot p_2 \cdot (A_{1g} - A_{2g}) \cdot (A_{1h} - A_{2h}) + \\
&p_1 \cdot p_3 \cdot (a_{1g} - a_{3g}) \cdot (A_{1h} - A_{3h}) + p_2 \cdot p_3 \cdot (A_{2g} - A_{3g}) \cdot (A_{2h} - A_{3h})] = B_{gh}. \quad (19b)
\end{aligned}$$

3. *Post-processing* GPS przy wykorzystaniu układu różnicowego typu Schreibera

3.1. Definicje pojedynczych, podwójnych i potrójnych różnic fazowych

Pojedyncze i podwójne różnice obserwacji fazowych są definiowane dla danej epoki obserwacyjnej, identyfikowanej momentem czasu t_k (rys. 2), natomiast różnice potrójne wynikają z pary różnic podwójnych dla różnych epok obserwacyjnych. W kwestiach szczegółowych można polecić bogatą już literaturę przedmiotu, m.in.: Hofmann-Wellenhof et al. (2001), Leick (2004), Xu (2007). Tutaj ograniczymy się tylko do koniecznych dla tematu publikacji definicji i oznaczeń.

Różnica pojedyncza dwóch obserwacji fazowych może być definiowana dwójako, albo dla pary satelitów i pojedynczego odbiornika, albo dla pary odbiorników i pojedynczego satelity. Pierwsza eliminuje błąd (offset) zegara odbiornika, druga — błąd zegara satelity. Z punktu widzenia tworzenia różnic wyższych rzędów definicja różnicy pojedynczej jest obojętna, gdyż ma ten sam skutek. Wybierając w naszym przypadku (ze względu na zastosowanie schematu Schreibera dla kombinacji par odbiorników — stacji naziemnych) drugą definicję, otrzymamy różnice pojedyncze jako:

$$\Delta\Phi_{pq}^i(t_k) = \Phi_p^i(t_k) - \Phi_q^i(t_k), \quad (20)$$

gdzie i oznacza umowny wskaźnik (indeks) satelity; p, q — umowne wskaźniki (indeksy) pary odbiorników.

Różnice podwójne zdefiniowane są już przez parę satelitów i parę odbiorników (stacji naziemnych):

$$\Delta\Delta\Phi_{p,q}^{i,j}(t_k) = \Delta\Phi_{p,q}^i(t_k) - \Delta\Phi_{p,q}^j(t_k). \quad (21)$$

Różnice potrójne faz otrzymamy natomiast, odejmując różnice podwójne dla dwóch różnych momentów czasu (epok) t_{k1}, t_{k2} , ale dla tej samej pary satelitów i odbiorników:

$$\Delta\Delta\Delta\Phi_{p,q}^{i,j}(t_{k1}, t_{k2}) = \Delta\Delta\Phi_{p,q}^{i,j}(t_{k1}) - \Delta\Delta\Phi_{p,q}^{i,j}(t_{k2}). \quad (22)$$

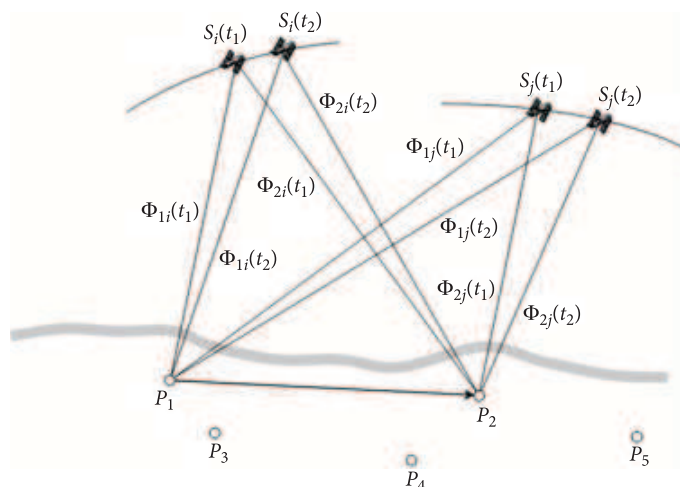
Powyższe definicje różnic fazowych różnych rzędów dotyczą jednego rodzaju emitowanej częstotliwości nośnej ($L1$ lub $L2$). Po zastosowaniu tzw. *ionosphere free* kombinacji $L1/L2$ (częstotliwość wypadkowa ($L3$) eliminuje wpływ refrakcji jonosferycznej) różnice fazowe są wyznaczone jako liniowe kombinacje odpowiednich różnic faz Φ_1, Φ_2 :

$$\Delta\Phi_{..} = \Delta\Phi_{1..} - (\lambda_1/\lambda_2) \cdot \Delta\Phi_{2..} \quad (23)$$

$$\Delta\Delta\Phi_{..} = \Delta\Delta\Phi_{1..} - (\lambda_1/\lambda_2) \cdot \Delta\Delta\Phi_{2..} \quad (24)$$

$$\Delta\Delta\Delta\Phi_{..} = \Delta\Delta\Delta\Phi_{1..} - (\lambda_1/\lambda_2) \cdot \Delta\Delta\Delta\Phi_{2..} \quad (25)$$

gdzie λ_1, λ_2 — długości fal odpowiednich sygnałów $L1, L2$.



Rys. 2. Ilustracja obserwacji fazowych GPS

Należy stwierdzić, że różnicowanie faz określone wzorami (20)-(22) służy przede wszystkim eliminacji istotnych czynników systematycznych charakteryzujących naturę sygnałów fazowych GPS: różnice pojedyncze (według przyjętej definicji) eliminują błędy (przesunięcia czasu) zegara satelity w stosunku do czasu GPS, różnice podwójne eliminują dodatkowo błędy zegarowe odbiorników, natomiast różnice potrójne — niewiadome funkcje liniowe całkowitych nieoznaczoności sygnałów fazowych. Pomimo pewnej atrakcyjności tej ostatniej cechy, różnice potrójne nie są zasadniczo używane w dokładnych (finalnych) algorytmach względnego pozycjonowania GPS. Powody, głównie numeryczne, związane ze skorelowaniem pseudoobserwacji, podano już we wstępie tej pracy. Podręczniki i publikacje teoretyczne z tego zakresu skupiają się głównie na optymalizacji algorytmów względnego pozycjonowania opartych na podwójnym różnicowaniu obserwacji fazowych i związanych z tym problemach identyfikacji całkowitych nieoznaczoności, natomiast — jak już wspomniano — różnice potrójne są używane głównie do „czyszczenia” (filtracji) obserwacji fazowych z różnego rodzaju defektów lub do rozwiązań przybliżonych wynikających z uproszczonych modeli stochastycznych.

Jest jeszcze inny problematyczny aspekt algorytmów tradycyjnych. Otóż przy tworzeniu różnicowych układów równań obserwacyjnych definiuje się (wyróżnia)

tw. satelitę bazowego (referencyjnego), względem którego powstaje np. układ różnic podwójnych. Taki układ nie będzie równoważny stochastycznie układowi pierwotnemu, przy założeniu, że offsety zegarów są wyznaczone jako dodatkowe niewiadome. Analogią takiego postępowania w klasycznej sieci geodezyjnej byłoby utworzenie ze zbioru obserwacji kierunkowych zbioru kątów odniesionych tylko do jednego wybranego kierunku. Ponadto, w przypadku długich sesji obserwacyjnych (np. 24-godzinnych), każdy z satelitów ma tylko kilkugodzinny okres wykorzystania. W ciągłym czasie długiej sesji należałoby więc dokonywać faktycznie zmiany satelity bazowego — definiować tę funkcję dynamicznie. Przy zastosowaniu modelu Schreibera dla obserwacji różnicowych znika ten problem, ponieważ każdy z użytych satelitów pełni analogiczną funkcję jak wybrany satelita referencyjny. Podobnie będzie w przypadku wielostacyjnych (wieloodbiornikowych) sesji obserwacyjnych — każda aktywna w sesji stacja pełni analogiczną funkcję jako stacja referencyjna. Wiele problemów numerycznych i związanych z konstrukcją poprawnego modelu stochastycznego znika po zastosowaniu modelu Schreibera do tworzenia układów pseudoobserwacji różnicowych. Niestety, wiąże się to z dodatkowym kosztem wynikającym stąd, że układ różnic Schreibera zawiera istotnie większą liczbę elementów niż klasycznie definiowany układ różnicowy. W zbiorze $m \cdot (m - 1)/2$ elementów układu Schreibera tylko $(m - 1)$ jest liniowo niezależnych, reszta może być utworzona na przykład z pierwszych $m - 1$ elementów.

3.2. Tworzenie układów różnicowych według modelu Schreibera

Niech $\mathbf{r} = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$, $p_1 < p_2 < \dots < p_r$, oznacza uporządkowany zbiór wskaźników wykorzystanych w danej sesji stacji naziemnych, zaś $\mathbf{s} = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_s$, uporządkowany zbiór wskaźników wykorzystanych w danej sesji obserwacyjnej satelitów.

W danej epoce t_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) będą wykorzystane tylko pewne podzbiory stacji i satelitów, odpowiadające podzbiworom $\mathbf{r}_k \subset \mathbf{r}$, $\mathbf{s}_k \subset \mathbf{s}$.

Stosując model Schreibera dla układu podwójnych różnic fazowych, definiujemy zbiory \mathbf{R}_k par (p, q) wskaźników stacji lub odbiorników (zakładając ogólne wielopunktowe zadanie *post-processingu*) oraz zbiory \mathbf{S}_k par (i, j) umownych indeksów porządkowych satelitów wykorzystywanych obserwacyjnie w kolejnych epokach obserwacyjnych t_k ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$\mathbf{R}_k = \{(p, q): (p < q) \wedge (p, q \in \mathbf{r}_k)\}, \quad (26)$$

$$\mathbf{S}_k = \{(i, j): (i < j) \wedge (i, j \in \mathbf{s}_k)\}, \quad (27)$$

k — wskaźnik epoki obserwacyjnej.

Dodatkowo przyjmijmy oznaczenia:

r_k — liczba odbiorników (stacji) aktywnych w epoce t_k (istnieją zarejestrowane obserwacje fazowe w tej epoce) danej sesji obserwacyjnej;

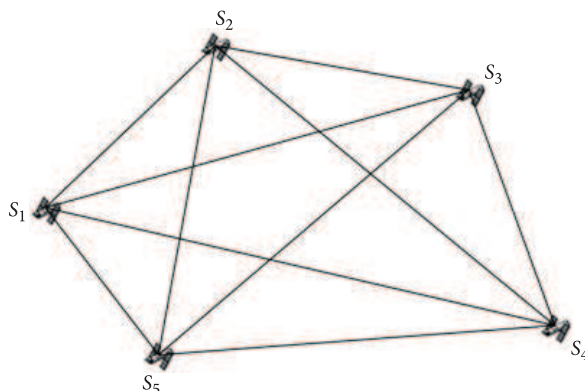
s_k — liczba satelitów wykorzystanych obserwacyjnie w epoce t_k .

Niech \mathbf{k} oznacza zbiór wskaźników wszystkich epok obserwacyjnych w określonym interwale czasu obserwacji $\langle a, b \rangle$. Faktycznie, dla każdej pary satelitów (i, j) oraz odbiorników (p, q) będzie wykorzystany tylko pewien ograniczony zbiór obserwacji fazowych, któremu odpowiada pewien podzbiór indeksów epok $\mathbf{k}_{p,q}^{i,j} \subset \mathbf{k}$. Ograniczenie wynika z wykluczenia (filtracji) obserwacji defektowych (nieusunięte utracone cykle — *cycle slips*, przerwane ciągi faz, elementy odstające), skutkuje ono pominięciem pewnych epok.

Potrójne różnice faz, jak wiadomo, są tworzone z par różnic podwójnych o tej samej konstelacji pary satelitów (i, j) i odbiorników (p, q) dla dwóch określonych epok $k_1, k_2 \in \mathbf{k}_{i,j}^{p,q}$. Plan Schreibera tworzenia różnic potrójnych dla danej konstelacji $(i, j), (p, q)$ określa następujący zbiór par wskaźników epok:

$$\mathbf{T}_{i,j}^{p,q} = \{(k_1, k_2): (k_1 < k_2) \wedge (k_1, k_2 \in \mathbf{k}_{i,j}^{p,q})\}. \quad (28)$$

Dla wygody rozważań przyjmijmy pomocniczą funkcję κ^* oznaczającą liczbę elementów zbioru $(^*)$. W tym znaczeniu $\kappa(\mathbf{R}_k) = r_k \cdot (r_k - 1)/2$, $\kappa(\mathbf{S}_k) = s_k \cdot (s_k - 1)/2$. Przyjmijmy też, że $\kappa(\mathbf{k}_{i,j}^{p,q}) = n_{i,j}^{p,q}$ (liczba efektywnie wykorzystanych epok dla odpowiednich par satelitów i odbiorników). Przyjmując przykładowo (rys. 3), że w epoce t_k efektywnie wykorzystano $s_k = 5$ satelitów i $r_k = 3$ odbiorniki — $\kappa(\mathbf{S}_k) = 10$, $\kappa(\mathbf{R}_k) = 3$, natomiast ogólna liczba utworzonych według schematu Schreibera podwójnych różnic fazowych w tej epoce wyniesie $\kappa(\mathbf{S}_k) \cdot \kappa(\mathbf{R}_k) = 30$. Gdyby podobna konstelacja układu obowiązywała np. przez $n = 100$ epok, wówczas ogólna liczba różnic podwójnych wynosiłaby 3000.



Rys. 3. Plan zbioru typu Schreibera dla $s = 5$ satelitów

Oznaczmy przez

$$\mathbf{DD} = \{(i, j), (p, q), k\}: (i, j) \in \mathbf{S}_k, (p, q) \in \mathbf{R}_k, k \in \mathbf{k}_{i,j}^{pq}\} \quad (29)$$

zbiór elementów, będących układami wskaźników dla podwójnych różnic fazowych według schematu Schreibera, zaś

$$\mathbf{TD} = \{(i, j), (p, q), (k1, k2)\}: (i, j) \in \mathbf{S}_{k1} \cap \mathbf{S}_{k2}, (p, q) \in \mathbf{R}_{k1} \cap \mathbf{R}_{k2}, (k1, k2) \in \mathbf{T}_{i,j}^{pq}\} \quad (30)$$

układem różnic potrójnych analogicznego typu. W praktycznej realizacji obu metod, ze względu na stosowane dodatkowe filtry eliminujące tzw. elementy odstające, faktycznie wykorzystane pseudoobserwacje będą określone przez pewne podzbiory

$$\underline{\mathbf{DD}} \subset \mathbf{DD}, \quad \underline{\mathbf{TD}} \subset \mathbf{TD}.$$

Liczby wszystkich elementarnych obserwacji w obu przypadkach określają wzory:

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{DD}) &= \sum_{i,j} \sum_{p,q} \kappa(\mathbf{k}_{i,j}^{pq}), & \kappa(\mathbf{TD}) &= \sum_{i,j} \sum_{p,q} \kappa(\mathbf{T}_{i,j}^{pq}), \\ \kappa(\underline{\mathbf{DD}}) &\leq \kappa(\mathbf{DD}), & \kappa(\underline{\mathbf{TD}}) &\leq \kappa(\mathbf{TD}). \end{aligned} \quad (31)$$

3.3. Zastosowanie twierdzenia 1 do tworzenia macierzy wagowych w układzie różnicowym typu Schreibera

Niech wariancja apriori dla elementarnej obserwacji fazowej wynosi σ^2 . Na podstawie prawa propagacji wariancji, w przypadku rozpatrywania tylko pojedynczego wektora GPS (*single baseline*), pojedyncze różnice fazowe określone wzorem (20) charakteryzują się wariancją $2 \cdot \sigma^2$ (tylko dla jednej bazy), ale dla sesji wielopunktowej, kiedy pojedyncze różnice obejmujemy planem Schreibera, określamy wagi zgodnie z twierdzeniem A:

$$\begin{aligned} \text{waga } \Delta\Phi &= [\text{waga } \Phi] \cdot [\text{waga } \Phi] : [\text{suma_wag } \Phi \text{ w } k\text{-tej epoce}] = \\ &= (1/\sigma^2) \cdot (1/\sigma^2) / [r_k \cdot (1/\sigma^2)] = 1/(r_k \cdot \sigma^2), \end{aligned} \quad (32)$$

r_k — liczba odbiorników z użyteczną (nieodrzuconą) obserwacją fazową w epoce t_k .

Założyliśmy w ten sposób typowy model stochastyczny dla obserwacji fazowych jako obserwacji niezależnych i jednakowo dokładnych (apriori z jednakową wariancją σ^2). Założenie jednakowej wariancji służy pewnej prostocie wywodu, ale

w świetle wykorzystywanego dalej twierdzenia A nie musimy ograniczać ogólności w tym znaczeniu. W szczególności można by przyjąć, za niektórymi stosowanymi modelami stochastycznymi, że wariancja pojedynczej obserwacji jest proporcjonalna do wartości $1/\sin^2(\beta)$, gdzie β jest kątem elewacji wektora: odbiornik–satelita.

Zgodnie z twierdzeniem 1 macierz wagowa w każdym przypadku zastosowania układu różnicowego typu Schreibera będzie macierzą diagonalną. Dla układu podwójnych różnic określonych planem **DD** diagonalna macierz wagowa składa się z podmacierzy skalarnych $\mathbf{W}_k = w_k \cdot \mathbf{I}$ (w_k — skalar, \mathbf{I} — macierz jednostkowa), odpowiadających kolejnym epokom obserwacyjnym, przy czym skalar jest określony następująco:

$$\begin{aligned} \text{waga } \Delta\Delta\Phi &= [\text{waga } \Delta\Phi] \cdot [\text{waga } \Delta\Phi] : [\text{suma wag } \Delta\Phi \text{ w } k\text{-tej epoce}] \\ w_k &= [1/(r_k \cdot \sigma^2)] \cdot [1/(r_k \cdot \sigma^2)] / [s_k/(r_k \cdot \sigma^2)] = 1/(\sigma^2 \cdot s_k \cdot r_k), \end{aligned} \quad (33)$$

gdzie: s_k — liczba satelitów i r_k — liczba odbiorników wykorzystywanych w epoce k -tej.

W szczególności $r_k > 2$ oznacza wielopunktową sesję obserwacyjną.

Z kolei określamy wagę dla potrójnej różnicy faz, biorąc również pod uwagę układ Schreibera tych różnic w zakresie wyboru par epok:

$\text{waga } \Delta\Delta\Delta\Phi = [\text{waga } \Delta\Delta\Phi \text{ dla epoki } k1] \cdot [\text{waga } \Delta\Delta\Phi \text{ dla epoki } k2] : [\text{suma wag } \Delta\Delta\Phi \text{ dla pojedynczych epok tworzących układ Schreibera przy określonej konstelacji pary satelitów i pary odbiorników}]$

$$\begin{aligned} w_{p,q}^{i,j}(t_{k1}, t_{k2}) &= (s_{k1} \cdot r_{k1} \cdot \sigma^2)^{-1} \cdot (s_{k2} \cdot r_{k2} \cdot \sigma^2)^{-1} \cdot [\Sigma(s_k \cdot r_k \cdot \sigma^2)^{-1}]^{-1} \\ &= (1/\sigma^2) \cdot [s_{k1} \cdot r_{k1} \cdot s_{k2} \cdot r_{k2}]^{-1} \cdot \left[\sum_k (s_k \cdot r_k)^{-1} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (34)$$

ale sumowanie dla wszystkich $k \in \mathbf{k}_{i,j}^{pq}$.

Dla danej potrójnej różnicy faz waga jest zależna od ilości efektywnych epok, wykorzystanych dla określonej pary satelitów i odbiorników.

4. Pełne równania obserwacyjne dla podwójnych i potrójnych różnic faz według schematu Schreibera

Różnice podwójne

Układ obserwacyjny podwójnych różnic faz, z uwzględnieniem wielopunktowych sesji obserwacyjnych, ma następującą postać:

$$\lambda_1 \cdot \Delta\Delta\Phi_{p,q}^{ij}(t_k) + \lambda_1 \cdot \Delta\Delta N_{p,q}^{ij} + \alpha \cdot \delta_{p,q}^{ij}(t_k) + e_{p,q}^{ij}(t_k) = \alpha \cdot \Delta\Delta\rho_{p,q}^{ij}(t_k) \quad (35)$$

dla $[(i, j), (p, q), k] \in \underline{DD}$ z diagonalną macierzą wagową, której elementy

$$w_k = 1/(\sigma^2 \cdot s_k \cdot r_k),$$

k — wskaźnik epoki obserwacyjnej, w której s_k oznacza liczbę identyfikowanych satelitów, r_k — liczba użytych odbiorników.

Przyjęto w równaniu następujące oznaczenia:

$\Delta\Delta N_{p,q}^{ij}$ — podwójna różnica całkowitych nieoznaczoności dla częstotliwości L1:

$$\Delta\Delta N_{p,q}^{ij} = \Delta\Delta N1_{p,q}^{ij}$$

lub przy kombinacji L1/L2 wolnej od wpływu jonosfery (*ionosphere free combination*):

$$\Delta\Delta N_{p,q}^{ij} = \Delta\Delta N1_{p,q}^{ij} - (\lambda_1/\lambda_2) \cdot \Delta\Delta N2_{p,q}^{ij}, \quad (36)$$

$\Delta\Delta N1.., \Delta\Delta N2..$ — odpowiadające L1, L2 podwójne różnice całkowitych nieoznaczoności;

$\delta_{p,q}^{ij}(t_k)$ — podwójna różnica korekt systematycznych: offsety anten, redukcje do centrum fazowego, poprawki troposferyczne oraz (alternatywnie) poprawki jonosferyczne;

$e_{p,q}^{ij}(t_k)$ — błąd przypadkowy obserwacji, przeskalowany czynnikiem α ;

$\Delta\Delta\rho_{p,q}^{ij}(t_k)$ — podwójna różnica odległości od punktów naziemnych (p, q) do satelitów (i, j) w momencie czasu t_k , definiowana jako funkcja wektora naziemnego $\Delta R_{pq} = (\Delta X_{pq}, \Delta Y_{pq}, \Delta Z_{pq})$ w kartezjańskim układzie geocentrycznym. Pozycje satelitów są interpolowane na moment detekcji sygnału fazowego $t_k - \tau$, gdzie τ to przesunięcie czasowe na linii satelita-odbiornik;

α — stały współczynnik, $\alpha = 1$ przy wykorzystaniu jedynie częstotliwości L1

albo

$$\alpha = 1 - (\lambda_1/\lambda_2)^2. \quad (37)$$

dla kombinacji L1/L2 (*ionosphere free*).

Różnice potrójne

Układ obserwacyjny potrójnych różnic faz z uwzględnieniem wielopunktowych sesji obserwacyjnych będzie postaci:

$$\lambda_1 \cdot \Delta\Delta\Delta\Phi_{p,q}^{ij}(t_{k1}, t_{k2}) + \alpha \cdot \delta_{p,q}^{ij}(t_{k1}, t_{k2}) + e_{p,q}^{ij}(t_{k1}, t_{k2}) = \alpha \cdot \Delta\Delta\Delta\rho_{p,q}^{ij}(t_{k1}, t_{k2}) \quad (38)$$

dla $[(p, q), (i, j), (k1, k2)] \in \underline{TD}$.

Układowi temu jest przyporządkowana (zgodnie z twierdzeniem A) diagonalna macierz wagowa, a pojedynczemu równaniu (38) waga:

$$w_{p,q}^{i,j}(t_{k1}, t_{k2}) = (1/\sigma^2) \cdot [s_{k1} \cdot r_{k1} \cdot s_{k2} \cdot r_{k2}]^{-1} \cdot [\sum_k (s_k \cdot r_k)^{-1}]^{-1}, \quad (39)$$

sumowanie dla wszystkich $k \in \mathbf{k}_{i,j}^{pq}$, s_k — liczba satelitów i r_k — liczba odbiorników wykorzystywanych epoce k -tej.

Rozwiązanie najmniejszych kwadratów

W obu modelach funkcjonalnych elementy różnicowe odległości $\Delta\Delta\rho_{p,q}^{i,j}(\dots)$, $\Delta\Delta\rho_{p,q}^{i,j}(\dots)$ tworzą nieliniowe funkcje składowych niewiadomego wektora GPS $\Delta R_{pq} = (\Delta X_{pq}, \Delta Y_{pq}, \Delta Z_{pq})$, przy czym w całym układzie występuje jedynie $r_k - 1$ wektorów niezależnych. Rozwiązanie zadań *post-processingu* wymaga więc użycia nieliniowych procedur metody najmniejszych kwadratów. Klasyczny sposób polega na zastosowaniu iteracyjnego algorytmu *Gaussa-Newtona*. Punktem startowym są w tym przypadku przybliżone wartości niewiadomych wyznaczone w zadaniu pozycjonowania bezwzględnego (procedura SPP — *single point position*). W konkretnych aplikacjach omówionych w p. 5, w ramach procesu iteracyjnego (trwającego z reguły od kilkunastu do kilkudziesięciu iteracji), dokonuje się równoległej filtracji obserwacji z tzw. elementów odstających oraz stosuje się dodatkowy czynnik wagi, zależny od aktualnie identyfikowanych residuów, wynikający z definicji tzw. estymacji mocnej. Wymienione elementy filtracji i estymacji mocnej, jak potwierdzają dotychczasowe testy numeryczne, optymalizują standardowy model stochastyczny układu obserwacyjnego.

5. Zastosowanie algorytmów w automatycznym *post-processingu* systemu ASG-EUPOS

Opisane powyżej algorytmy względnego pozycjonowania w oparciu o obserwacje fazowe zostały zaaplikowane po raz pierwszy w module automatycznego *post-processingu* (APPS) serwisu POZGEO systemu ASG-EUPOS, a także (równolegle) w specjalnym programie *post-processingu* GPS, dołączonym do pakietu geodezyjnego GEONET (www.geonet.net.pl).

System ASG-EUPOS został oddany do dyspozycji użytkowników w czerwcu 2008 i jest już narzędziem wykorzystywanym szeroko w pracach geodezyjnych. Należy dodać, że obok serwisu POZGEO, do dyspozycji użytkowników są inne serwisy, zwłaszcza NAWGEO (powierzchniowy RTK) oraz serwis POZGEO-D, umożliwiający bezpośrednie wykorzystanie obserwacji na stacjach referencyjnych lub na zdefiniowanych stacjach wirtualnych (VRS).

Szczegółowy opis funkcjonalny modułu APPS i w szerszym znaczeniu serwisu POZGEO przedstawiono w dokumentacji eksploatacyjnej systemu, a także w publikacji Kadaj, Świętoń (2008). Pierwszy (wstępny) etap obliczeń obejmuje następujące zadania:

- proces przygotowania, selekcji i filtracji danych źródłowych, pochodzących z plików w formacie RINEX, dla 10 najbliższych stacji referencyjnych,
- identyfikację ewentualnych orbit precyzyjnych i typów anten (danych kalibracyjnych absolutnych modeli anten),
- obliczenie orbit satelitów, wyznaczenie ich dyskretnych pozycji dla wszystkich epok oraz wyznaczenie współrzędnych przybliżonych pozycji odbiorników (zadanie SPP — *single point position*),
- wykonanie redukcji troposferycznych (zastosowano m.in. model GMF — *global mapping function* do określenia przestrzennego rozkładu poprawek troposferycznych),
- i przetworzenie zbiorów obserwacji fazowych do wtórnej postaci wewnętrznej.

Kolejne etapy obejmują już obliczenia i wyrównania sieci wektorów, a do tego celu użyto równolegle dwóch metod, podwójnych i potrójnych różnic fazowych — obie stosują opisane w tej pracy algorytmy oparte na układzie różnicowym Schreibera. Metodę opartą na potrójnych różnicach faz w układzie typu Schreibera nazwano w szczególności metodą β . Użycie jej jako alternatywy metody różnic podwójnych pokazuje w praktyce istotne korzyści jakościowe, zwłaszcza w sytuacji wykorzystywania obserwacji fazowych tylko z jednej częstotliwości ($L1$), gdy istnieją trudności z jednoznaczną identyfikacją niektórych całkowitych kombinacji nieoznaczoności (*ambiguities*). Metoda β eliminuje ten problem, zgodnie z jej modelem funkcjonalnym. Trzeba jednak dodać, że przy znacznej liczbie epok, zbiór par epok według schematu Schreibera (30) staje się wielokrotnie większy niż sama liczba epok, stąd dokładnie realizowana metoda β będzie bardziej kosztowna niż metoda podwójnych różnic fazowych. Z tego powodu, w praktycznej realizacji metody β , zwłaszcza dla znacznej liczby epok, stosuje się uproszczenia numeryczne, polegające np. na „rozrzedzaniu” zbioru obserwacji, zachowując jednak generalnie cechy charakterystyczne schematu Schreibera dotyczące jednorodności i symetrii wskaźników użytych obserwacji różnicowych.

W algorytmie automatycznego *post-processingu*, mając do dyspozycji wyniki procesu zrealizowanego dwiema metodami, wybiera się zawsze rozwiązanie, które w sensie empirycznym (aposteriori) wykazuje lepszą dokładność wyznaczenia pozycji. W każdym przypadku finalna pozycja punktu jest wyznaczana w oparciu o wektory utworzone do najbliższych stacji referencyjnych (wyrównanie układu wektorów przy założeniu znanych współrzędnych stacji referencyjnych).

W finalnych wynikach serwisu APPS zawierają się szczegółowe raporty jakościowe i rzeczowe oraz interpretacje graficzne, w tym ilustracje przebiegów sygnałów fazowych i ich residuów (szumów losowych) oraz konstelacji użytych satelitów. Użytkownik otrzymuje raport skrócony zawierający współrzędne pozycji w układzie ETRF'89, przeliczone także do państwowych układów współrzędnych płaskich i wysokościowych, oraz podstawowe charakterystyki dokładnościowe. Raport zawiera także niezbędne informacje techniczne dotyczące m.in.: czasu obserwacji, nazw wykorzystanych stacji referencyjnych, typów anten, typów orbit, rodzaju użytych częstotliwości.

Moduł APPS, pomimo jego już szerokiego zastosowania, pozostaje w fazie testów autorskich. Z dotychczasowych statystyk wynika, że dokładność wyznaczenia pozycji, przy założeniu odbiorników dwuczęstotliwościowych, minimalnych kątów elewacji satelitów 10 stopni, minimum godzinnej sesji obserwacyjnej, można określić przeciętnym błędem położenia ok. 17 mm. Dokładności wyższe, z błędem poniżej jednego centymetra, uzyskuje się w podobnych warunkach dla co najmniej dwugodzinnych sesji obserwacyjnych. Szczegółowe wyniki testów proponowanych metod i algorytmów zostaną przedstawione w oddzielnej publikacji.

Artykuł wpłynął do redakcji 11.03.2009 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w październiku 2009 r.

LITERATURA

- [1] V. ASHKENAZI, J. YAU, *Significance of discrepancies in the processing of GPS data with different algorithms*, Journal of Geodesy, 60, 3, September 1986, 229-239.
- [2] G. BEUTLER, W. GURTNER, I. BAUERSIMA, M. ROTHACHER, *Efficient computation of the inverse of the covariance matrix of simultaneous GPS carrier phase difference observations*, Manuscripta Geodaetica, 11, 1986, 249-255.
- [3] G. BEUTLER, I. BAUERSIMA, W. GURTNER, M. ROTHACHER, *Correlations between simultaneous GPS double difference carrier phase observations in the multistation mode: implementation considerations and first experiences*, Manuscripta Geodaetica, 12, 1987, 40-44.
- [4] K. EREN, *Geodetic network adjustment using GPS triple difference observations and a priori stochastic information*, TR 1, Institute of Geodesy, University of Stuttgart, 1987.
- [5] B. HOFMANN-WELLENHOF, H. LICHTENEGGER, J. COLLINS, *GPS — Theory and Practice*, Springer-Verlag, Wien–New York, 2001.
- [6] R. KADAJ, *Integration of GPS – and classical observations in geodetic network* (orig. in PL: *Problematyka integracji sieci GPS z sieciami klasycznymi*), Seminar of Sections: Geodetical Network and Satellite Geodesy of Polish Academy of Sciences: *Actual Problems of National Geodetic Network*; Warszawa, 16.XI. 2006.
- [7] R. KADAJ, *Algorithms and procedures of BETA method for post-processing GPS based on triple phase differences* (orig. in PL: *Algorytmy i oprogramowanie metody BETA realizacji postprocesingu GPS oparte na potrójnych różnicach obserwacji fazowych*), GPS software documentation for GEONET® — geodetical system, ALGORES-SOFT, Rzeszów, 2007.

-
- [8] R. KADAJ, T. ŚWIĘTOŃ, *Automatic post-processing in ASG-EUPOS* (in PL: *Automatyczny post-processing w ASG-EUPOS*), *GEODETA* (PL), 10, 2008, 14-18.
 - [9] A. LEICK, *GPS Satellite Surveying*, John Wiley & SONS, INC, 2004.
 - [10] W. LINDLOHR, D. WELLS, *GPS design using undifferenced carrier beat phase observations*, *Manuscripta Geodaetica*, 10, 4, 1985, 255-295.
 - [11] B. W. REMONDI, *Global positioning system carrier phase: description and use*, *Bulletin Geodesique*, 59, 1985, 361-377.
 - [12] Z. RZEPECKA, *Modification of Algorithms for Determination of Short Kinematic Vectors from GPS Data*, Dissertation and Monographs, 86, 2004, University of Warmia and Mazury in Olsztyn, PL, 2004.
 - [13] O. SCHREIBER, *Anordnung von Horizontalwinkelbeobachtungen auf der Station*, *ZfV*, 1878, 209.
 - [14] G. XU, *GPS — Theory, Algorithm and Applications*, Springer-Verlag (second ed.), 2007.

R. KADAJ

**Application of Schreiber's type difference observation system
for elaboration of a session of static GPS measurements**

Abstract. The paper presents new algorithms for GPS relative positioning, basing on Schreiber's type sets of carrier phase differences. Traditional procedures, using the double or triple phase differencing and strict stochastic models in the least-squares estimation, require the inverting of non diagonal and usually large covariance matrix. The final product of inversion is a full (non diagonal) weight matrix. The cost of the complete solution is very simple in case of a multi-point GPS session and by application of triple phase differences. Formulating the Schreiber's type set of differences we obtain the least-squares estimation with the diagonal weight matrix. The estimators are identical to the original task. The applicable features of the algorithms are theoretically proved. The algorithms are implemented in professional GPS software, e.g. in the automatic *post-processing* module (APPS) in ASG-EUPOS system of reference stations in Poland.

Keywords: GPS relative positioning, *post-processing*, double phase differences, triple phase differences, diagonal weight matrix, Schreiber's type set of differences, multipoint GPS session, multi-baseline GPS session, automatic *post-processing*, ASG-EUPOS

Universal Decimal Classification: 527