

GEOIDPOL-2008 jako centymetrowej dokładności model quasi-geoidy dla obszaru Polski oparty na globalnym modelu geopotencjalnym EGM-2008 i polskich trójwymiarowych sieciach satelitarno - niwelacyjnych EUVN, EUREF-POL i POLREF

[Publikacja internetowa 1/2012 (18 stron) © ALGORES-SOFT, www.geonet.net.pl, 7 maja 2012]

1. Wstęp

Najnowszy, wysokorozdzielczy model geopotencjału pod nazwą EGM-2008 (*Pavlis* i in., 2008a, 2008b, 2011, głównie z afiliacją *National Geospatial-Intelligence Agency*), dostępny praktycznie w postaci współczynników harmonicznych do stopnia i rzędu 2160, oraz w formie numerycznego modelu globalnej geoidy (w systemie wysokości ortometrycznych)

[http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/egm08_wgs84.html], stał się podstawą do weryfikacji i oceny jakościowej lokalnych (krajowych) modeli quasi-geoidy. Przykładowo, dla obszaru Niemiec badania takie opublikował *Hirt C.*, 2011, podobnie badania porównawcze polskich modeli przedstawił *Kryński (Kryński, i in., 2009)*.

Niezidentyfikowane pod względem przyczyn odchylenia systematyczne porównywanych modeli stwarzają pewne problemy interpretacyjne ale ostatecznie można je eliminować również metodami statystycznie – numerycznymi przyjmując, że pewne warunki definiujące model (zbiory punktów satelitarno-niwelacyjnych) mają znaczenie priorytetowe (ważą więcej).

Biorąc oryginalną postać modelu geoidy EGM-2008 można określić mierzalnie (metrycznie), na ile model ten nie jest zgodny wprost (bezpośrednio) z polskimi układami odniesienia, które są zrealizowane fizycznie przez osnowy satelitarno – niwelacyjne i (wedle Rozporządzenia RM) wyrażone w układach: ETRF'89 na epokę 1989.0 oraz Kronstadt'86 (w zakresie wysokości normalnych). W takim porównaniu modelu z realną osnową satelitarno-niwelacyjną otrzymujemy różnice, które niezależnie od ich natury fizycznej i geometrycznej, traktujemy jako odchylenia systematyczne. Mają one jednak głównie charakter lokacyjny, możliwy do modelowania metodami transformacyjnymi. Zakładając taką możliwość, model EGM-2008 można efektywnie wykorzystać jako jedno z istotnych źródeł danych generujących z wysoką precyzją model quasi-geoidy, spójny z polskimi układami odniesienia.

W związku z powyższą tezą, zrealizowano (opisany dalej szczegółowo) kilkietapowy proces przekształceń numerycznych modelu globalnego ograniczonego do obszaru Polski, uwzględniając trójwymiarowe sieci satelitarno-niwelacyjne EUVN, EUREF-POL i POLREF, - tylko te, które nie budzą wątpliwości co do poprawności wyznaczeń geodezyjnych. Przy założeniu pewnej „elastyczności” modelu EGM-2008, dostajemy finalnie model numeryczny quasi-geoidy, który w świetle wykonanych testów kontrolnych wykazuje relatywnie wysoką precyzję bezwzględną. Lokalnie identyfikowane różnice pomiędzy modelowymi wysokościami quasi-geoidy, a odpowiadającymi wartościami empirycznymi z pomiarów niwelacyjno-satelitarnych występują zasadniczo na średnim poziomie od 0.003 do 0.013 m, przy czym zawsze mieszczą się w standardzie błędu pomiarowego. W obszarze Tatr odnotowuje się natomiast błąd standardowy na poziomie 0.03 m, co może być zrozumiałe także ze względu na samą dokładność pomiarów niwelacyjnych w warunkach wysokogórskich. Utworzony model nazywamy

symbolicznie GEOIDPOL-2008 jako pewien rezultat kontynuacji badań nad modelem i programem GEOIDPOL-2001 (Kadaj, 2001a), jakkolwiek obecnie przy zupełnie odmiennych warunkach początkowych. Statystycznie biorąc model obecny wykazuje około trzykrotnie wyższą dokładność w stosunku do modelu GEOIDPOL-2001.

Pierwotnym modelem numerycznym polskiej geoidy, wykorzystanym m.in. do obliczeń osnów podstawowych, była geoida grawimetryczna (Łyszkowicz, 1993 - 2000; Łyszkowicz i Forsberg, 1995). Wiele prac wykonywanych następnie od roku 2000 zmierzały do wykorzystania, obok geoidy grawimetrycznej, równie istotnych danych empirycznych wynikających z istniejących sieci satelitarno-niwelacyjnych (Łyszkowicz, 2000; Pażus i in., 2002; Kryński, 2007; Kadaj, 2001a) lub tylko samych sieci satelitarno-niwelacyjnych (Osada, 2001). Trzeba podkreślić, że opracowanie zespołu pod kierunkiem *prof. Kryńskiego* (Kryński, 2007) syntetyzuje kompleksowe badania nad „geoidą centymetrową”, wykorzystując obok danych grawimetrycznych i satelitarno-niwelacyjnych także dane astrometryczne, geologiczne, mareograficzne, czy topograficzne.

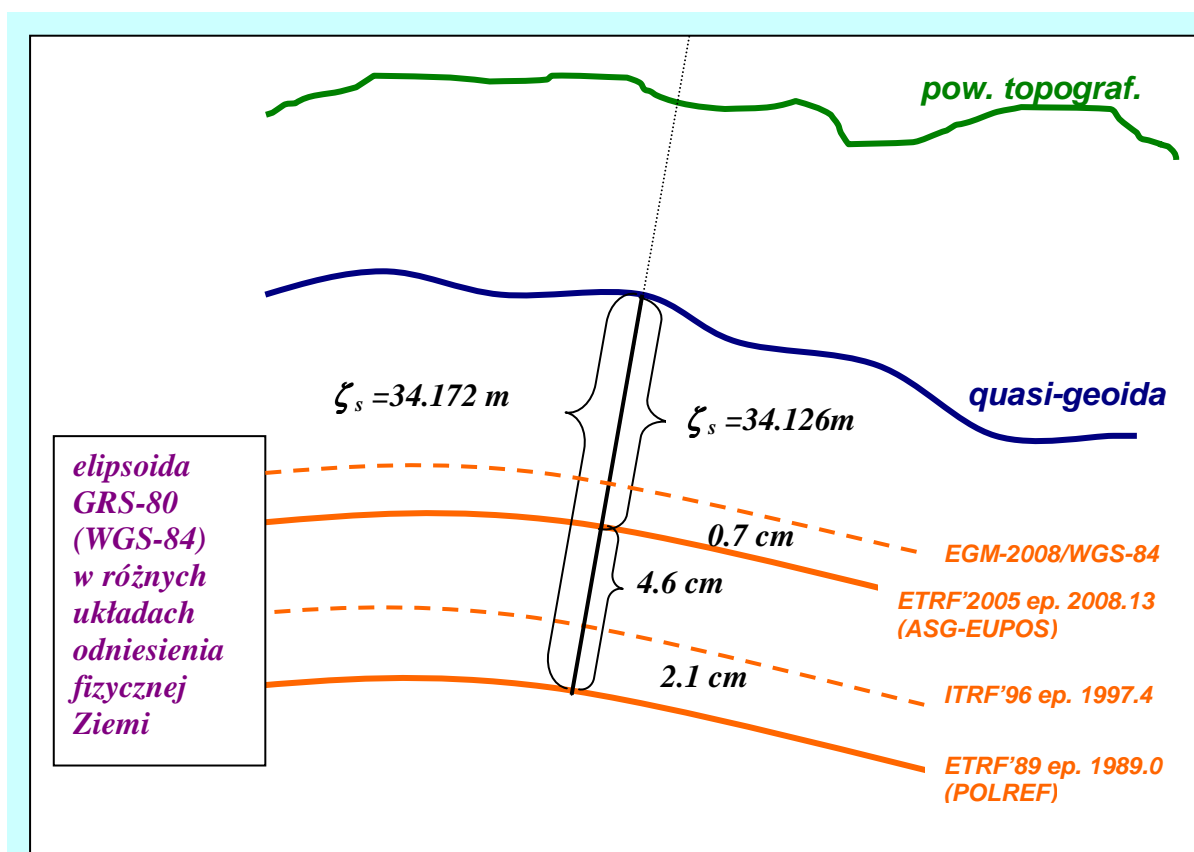
W porównaniu z wcześniejszymi pracami wykorzystującymi sieci satelitarno – niwelacyjne, przy tworzeniu modelu GEOIDPOL_2008 zrezygnowano całkowicie z sieci wojskowej (nazywanej symbolicznie skrótem WSSG). Analiza tej sieci wykazała, że występują w niej wewnętrzne „niespójności” stwarzające ryzyko istotnego zniekształcenia finalnego modelu quasi-geoidy.

Jak wiadomo z publikowanych raportów dotyczących bardzo ważnego w praktyce geodezyjnej systemu ASG-EUPOS (np. Ryczywolski, 2011), stacje tego systemu (centra geometryczne anten) są wyznaczone w układzie ETRF'2005 na epokę 2008.13. Jest więc oczywiste (por. rys.1), że do niwelacji satelitarnej w serwisach tego systemu nie może być użyty bezpośrednio żaden z dotychczasowych modeli quasi-geoidy, które zgodnie z warunkami technicznymi GUGiK zrealizowano w układzie ITRF'96, na epokę 1997.4 (błąd systematyczny w sensie wyznaczeń wysokości bezwzględnych wynosiłby wtedy nawet ok. 5 cm). W serwisie automatycznego postprocessingu POZGEO (Kadaj i Świętoń, 2008-20011) zastosowano wprawdzie jako zasadniczy model GEOIDPOL-2001 ale konieczną transformację anomalii wysokości z układu ITRF'96/ep.1997.4 do układu ETRF'2005/ep.2008.13 wykonuje się tu automatycznie, za pomocą procedury wewnętrznej programu (stosowną zmianę wprowadzono na przełomie 2010/2011).

2. Ogólne relacje pomiędzy stosowanymi w praktyce układami odniesienia w aspekcie anomalii wysokości

Wykonajmy prosty test numeryczny (rys.1) ujawniający przeciętne relacje pomiędzy anomaliami wysokości w różnych układach odniesienia. Bierzemy pod uwagę punkty polskich sieci niwelacyjno – satelitarnych (bez WSSG). Jest to dokładnie 400 punktów (po wykluczeniu kilku punktów EUREF-POL+POLREF dublujących się z punktami sieci niwelacyjnej EUVN). Dla wszystkich 400 punktów obliczamy różnice pomiędzy wysokościami elipsoidalnymi w układzie ETRF'89 / ep. 1989.0, a wysokościami normalnymi (z niwelacji) w układzie Kronstadt'86 oraz średnią wartość tych różnic, która wynosi dokładnie ζ_s (ETRF'89) = 34.172 m. Podobną operację wykonamy po przekształceniu punktów do układu ETRF'2005/ ep.2008.13 czyli układu stacji ASG-EUPOS (użyte wzory przekształceń dla współrzędnych geocentrycznych XYZ, które wyznaczono empirycznie na podstawie punktów łącznych, podano w załączniku 1) otrzymując ζ_s (ETRF'2005) = 34.126 m.

Różnica empirycznych anomalii wysokości z obu układów wynosi średnio 0.046 m ale zmienia się w granicach 0.018 - 0.079 m. Na rysunku pokazano analogicznie w punkcie „średnim” położenie elipsoidy układu ITRF'96 / ep. 1997.4 (przeciętny odstęp od układu ETRF'89 / ep. 1989.0 wynosi dokładnie 0.021 m i zmienia się w granicach od 0.002 – 0.041 m. Stąd widać, że tzw. „geoidy urzędowe” (nie wiadomo bliżej skąd pojawia się taka nazwa) nie mają bezpośredniego użycia, ani w układzie „urzędowym” ETRF'89, ani też w układzie wyznaczenia stacji ASG-EUPOS. Powstały błąd systematyczny może być oczywiście eliminowany przez każdorazowe „wpasowanie” w lokalną osnowę wysokościową ale trzeba brać pod uwagę to, że ma on wartość sytuacyjnie zmienną. Ponadto, należy zważyć, że jedną z naczelnych zasad pomiarów geodezyjnych jest eliminowanie błędów systematycznych, jeśli tylko źródło ich powstania jest wiadome i mierzalne. Tutaj właśnie mamy do czynienia z taką sytuacją, bo formuły przekształceń między układami są ogólnie wiadome. Jak już wspomniano, zasadę taką zastosowano w serwisie POZGEO w systemie ASG-EUPOS, gdzie anomalie wysokości z modelu GEOIDPOL-2001 są transformowane do układu ETRF'2005 na epokę 2008.13.



Rys.1. Średnie różnice pomiędzy wysokościami elipsoidalnymi a normalnymi obliczone z danych satelitarno-niwelacyjnych dla 400 punktów sieci EUVN+EUREF-POL+POLREF w różnych układach odniesienia.

Na rys. 1 zaznaczono też średnią różnicę (0.7 cm) pomiędzy empirycznymi anomaliami wysokości (z osnowy) w układzie ETRF'2005, a interpolowanymi dla tych samych punktów wielkościami undulacji modelu EGM-2008, jakkolwiek wielkości te nie są bezpośrednio porównywalne, bo model globalnej geoidy nie jest quasi-geoidą naszego systemu wysokości normalnych. Możemy oczywiście dociekać dokładnych relacji przestrzennych w tym znaczeniu, ale dla efektywnego wykorzystania modelu EGM-2008 nie jest to konieczne. W każdym

przypadku bowiem, finalny produkt musi być wpasowany w realny układ odniesienia, reprezentowany przez osnowy satelitarno-niwelacyjne. Można więc powiedzieć (niemal trywialnie), że niezależnie od kwestii samej reprezentacji układu ETRF w systemie ETRS, związanej z potrzebą transformowania modelu na konkretne zastosowania praktyczne, taki będziemy mieć jakościowo (dokładnościowo) model quasi-geoidy jak dokładne będą „komparujące” ten model osnowy satelitarno – niwelacyjne.

2. Algorytm utworzenia numerycznego modelu quasi-geoidy GEOIDPOL-2008

2.1. Dane źródłowe

Podstawowe dane źródłowe dla utworzenia numerycznego modelu GEOIDPOL-2008 to model globalny EGM-2008 oraz wymienione krajowe osnowy trójwymiarowe, EUVN, EUREF-POL i POLREF. Specyfikacja danych jest następująca:

Podzbiór modelu EGM-2008: z globalnego modelu numerycznego EGM-2008, w siatce o rozdzielczości $1' \times 1'$, wydzielono obszar „trapezowy” pomiędzy południkami $13^\circ - 25^\circ$ i równoleżnikami $48^\circ - 56^\circ$, a więc pokrywający z pewnym zapasem obszar Polski. Siatka modelu zawiera łącznie 346801 węzłów (481×721) o następującej strukturze rekordów:

$$[B_i, L_j, N_{ij}(\text{EGM-2008})]$$

gdzie $i = 0, 1, \dots, 480$, $j = 0, 1, \dots, 720$ - wskaźniki umowne węzła siatki, B_i, L_j - współrzędne geodezyjne węzła siatki, $N_{ij}(\text{EGM-2008})$ - wartość undulacji w węźle siatki (i, j) modelu EGM-2008. Z publikacji dotyczących EGM-2008 wiadomo, że do opisu geopotencjału użyto parametrów WGS-84 jako modelu ziemi. Układ odniesienia undulacji modelu EGM-2008 w stosunku do polskiej reprezentacji układu odniesienia ETRF'89 i systemu wysokości normalnych Kronstadt '86 nie jest jednak a priori określony, co oznacza, że nie możemy dokonywać bezpośrednich porównań elementów modelu z odpowiadającymi elementami jakiegoś układu odniesienia, przed sprowadzeniem wielkości porównywanych do wspólnej przestrzeni metrycznej.

Sieć niwelacyjno-satelitarna: zbiór współrzędnych geodezyjnych B_k, L_k , wysokości elipsoidalnych $H^{\text{el}}(\text{ETRF}'89)$ i wysokości normalnych $H^{\text{norm}}(\text{Kronstadt}'86)$, a więc także różnic $\zeta_{\text{osn}} = H^{\text{el}} - H^{\text{norm}}$ dla punktów sieci trójwymiarowych EUVN + EUREF-POL + POLREF w układzie ETRF'89 na epokę 1989.0 (według wyciągu bazy GUGiK z dnia: 25.01.2007 - pismo L.dz. DOP/10130/2007).

Zbiór współrzędnych i wysokości ma następującą strukturę rekordów:

$$[NR_k, B_k, L_k, H_k^{\text{el}}(\text{ETRF}'89), H_k^{\text{norm}}(\text{Kronstadt}'86), \zeta_k(\text{ETRF}'89)]$$

dla $k=1, 2, \dots, 400$ - umowny wskaźnik punktu osnowy. Kompletny zbiór, po uzgodnieniu kilku punktów łącznych pomiędzy sieciami zawiera dokładnie 400 punktów.

Najważniejszym celem niniejszego opracowania jest aproksymacyjne (numeryczne) przekształcenie undulacji modelu EGM2008 w odpowiadający zbiór anomalii wysokości, określonej jako różnice wysokości elipsoidalnych w układzie ETRF'89 na epokę 1989.0 i wysokości normalnych w układzie Kronstadt'86:

$$\{ N_{ij}(\text{EGM-2008}) \} \rightarrow \{ \zeta_{ij}(\text{ETRF}'89, \text{Kronstadt}'86) \}$$

dla wszystkich węzłów (i, j) modelu numerycznego

Na całość przekształcenia składają się zarówno trójwymiarowe transformacje pomiędzy układami jak też zadania interpolacyjne dopuszczające pewne uelastycznienie kształtu modelu oryginalnego, związane z jego wpasowaniem w osnowę.

2.2. Etapy obliczeniowe

Określone wcześniej zadanie jest realizowane w kilku etapach:

ETAP 1: Dla danej sieci niwelacyjno-satelitarnej tworzymy zbiór współrzędnych geodezyjnych punktów reprezentujących quasi-geoidę i przekształcamy go w odpowiadający zbiór współrzędnych kartezjańskich geocentrycznych w układzie ETRF'89

$$\{ (B_k, L_k, \zeta_k(\text{ETRF}'89)) \}_{\text{osnowa-ETRF}'89} \Rightarrow \{ (X_k, Y_k, Z_k) \}_{\text{osnowa-ETRF}'89}$$

$k = 1, 2, \dots, 400$ - umowny wskaźnik punktu

lub krócej (symbolicznie): $(\mathbf{BL}\zeta)_{\text{osnowa-ETRF}'89} \Rightarrow (\mathbf{XYZ})_{\text{osnowa-ETRF}'89}$.

Wszystkie współrzędne, podobnie jak anomalie wysokości ζ_k wyrażone w układzie ETRF'89 na epokę 1989.0. Zauważmy, że przekształceniu podlegają nie oryginalne punkty osnowy lecz ich rzuty helmertowskie (ortogonalne i prostoliniowe) na quasi-geoidę, której model numeryczny jest celem zadania (nie jest jeszcze określony).

Przekształcenie wykonujemy standardowym programem przeliczeń współrzędnych pomiędzy układami (np. UNITRANS, TRANSPOL).

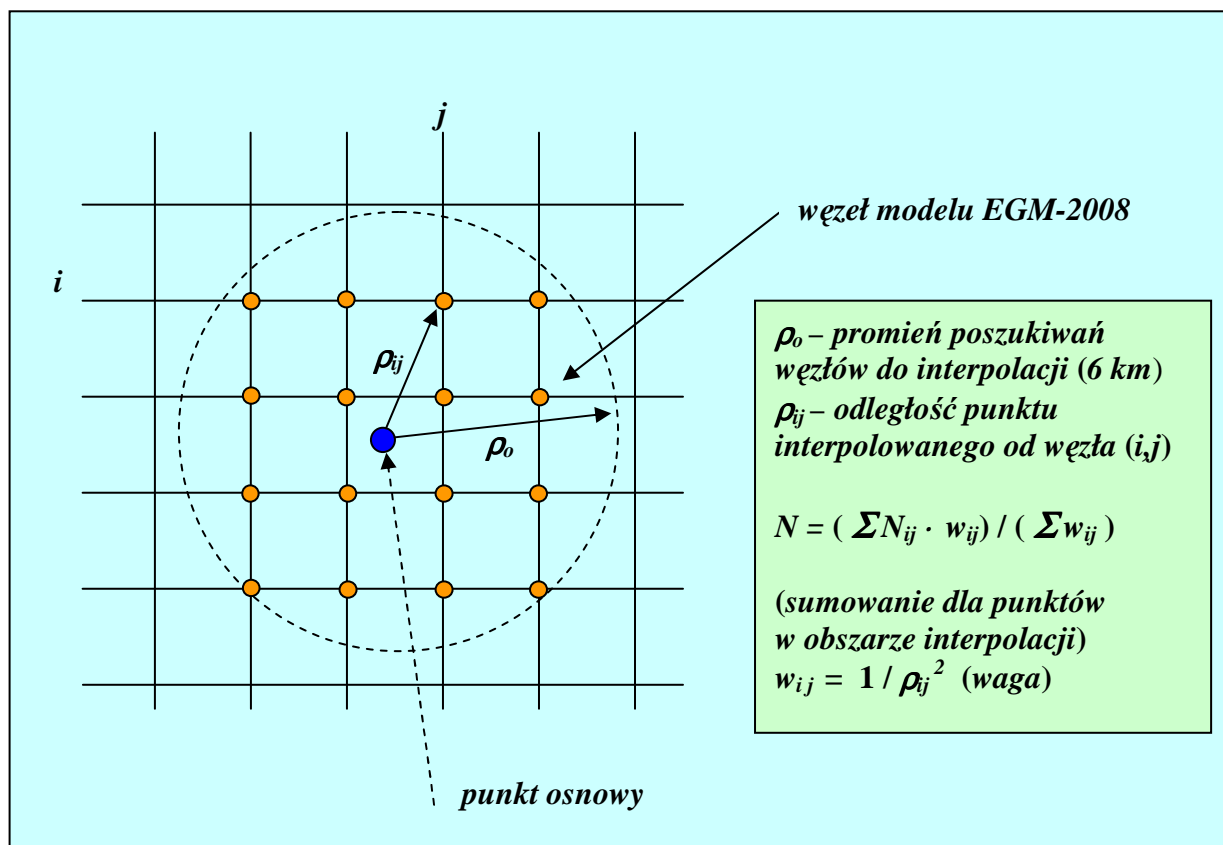
ETAP 2: Korzystając z modelu EGM-2008 interpolujemy wartości jego undulacji w punktach osnowy, czyli dla kolejnych punktów osnowy we współrzędnych (B_k, L_k) interpolujemy wartość N_k (EGM-2008). Te wartości undulacji nie są porównywalne z odpowiadającymi wartościami pomiarowymi ζ_k (ETRF'89), gdyż różnią się definicjami wysokości i pochodzą z innego układu odniesienia. Tworzymy więc dla osnowy równoległy zbiór współrzędnych geodezyjnych punktów osnowy zrzutowanych teraz geoidę EGM-2008, i przekształcamy go na współrzędne geocentryczne:

$$\{ (B_k, L_k, N_k(\text{EGM-2008})) \}_{\text{osnowa-EGM-2008}} \Rightarrow \{ (X_k, Y_k, Z_k) \}_{\text{osnowa-EGM-2008}}$$

$k = 1, 2, \dots, 400$ - umowny wskaźnik punktu

lub symbolicznie: $(\mathbf{BLN})_{\text{osnowa-EGM-2008}} \Rightarrow (\mathbf{XYZ})_{\text{osnowa-EGM-2008}}$.

Wyjaśnienia wymaga sposób wykonywanej interpolacji: W przeciwieństwie do tzw. interpolacji biliniowej stosowanej zwyczajowo dla pojedynczego „oczka” siatki, w którym leży punkt interpolowany zastosowano sposób uwzględniający także sąsiednie oczka siatki, co sprawia, że wynik interpolacji nie jest silnie zależny od lokalnego błędu modelu. Do interpolacji zastosowano znany w numerycznym modelu terenu wzór średniej ważonej, z wagami odwrotnie proporcjonalnymi do kwadratów odległości punktu interpolowanego od węzła siatki (rys. 2).



Rys. 2. Ilustracja zasady interpolacji – przeniesienia oryginalnego modelu EGM-2008 na osnowę.

ETAP 3: Etap ten stanowi transformacja trójwymiarowa modelu EGM-2008 na układ ETRF'89 reprezentowany przez osnowę. Transformację tę wykonano programem **TRANS_3D** w pakiecie **GEONET_2006**, stosując opcję transformacji konforemnej, 7-mio parametrowej. Informatycznie jest to przekształcenie pewnego zbioru współrzędnych pierwotnych o nazwie **XYZ1** na zbiór współrzędnych aktualnych o nazwie **XYZ2**:

$$\mathbf{XYZ1} \Rightarrow \mathbf{XYZ2}$$

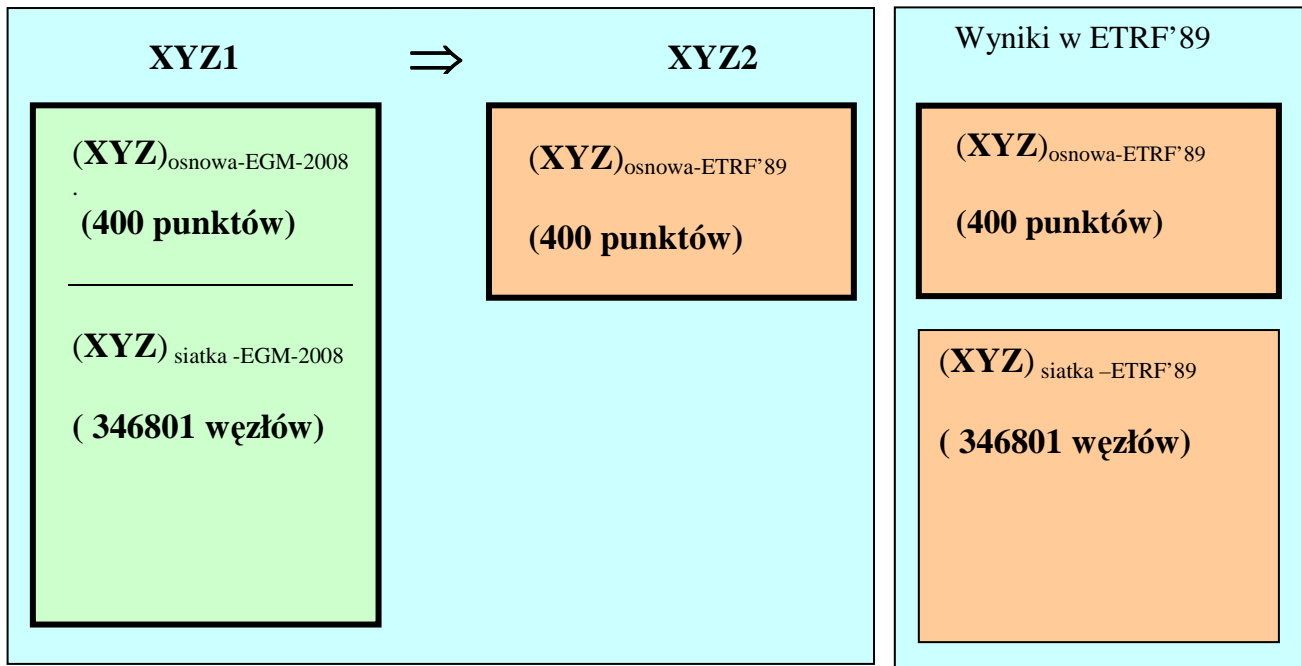
W naszym przypadku struktury zbiorów przedstawia rys. 3.

Zbiór (**XYZ**) siatka - EGM-2008 jest utworzony wprost z modelu EGM-2008 przez przekształcenie wykonane bezpośrednio programem UNITRANS:

$$\{ [B_i, L_j, N_{ij}(\text{EGM-2008})] \} \Rightarrow (\mathbf{XYZ})_{\text{siatka - EGM-2008}}$$

W wyniku transformacji $\mathbf{XYZ1} \Rightarrow \mathbf{XYZ2}$ otrzymujemy siatkę modelu wpasowaną już do układu ETRF-89, najpierw jako zbiór współrzędnych geocentrycznych, przekształcony następnie na współrzędne geodezyjne z aproksymowanymi wysokościami quasi-geoidy:

$$(\mathbf{XYZ})_{\text{siatka - ETRF}^{\prime}89} \Rightarrow \{ [B_i, L_j, \zeta_{ij}(\text{ETRF}^{\prime}89)] \}$$



Rys. 3. Struktura zbiorów wejściowych i wynikowych transformacji trójwymiarowej, 7 – parametrowej.

Program serwuje dwa alternatywne rozwiązania – wynik transformacji 7-mio parametrowej oraz wynik takiej transformacji poprawionej o tzw. korekty *Hausbrandta*. Wybieramy to drugie rozwiązanie, ponieważ zakładamy, że anomalie rzeczywiste obliczone dla punktów osnowy stanowią w pewnym sensie priorytet nad informacją z samego modelu (osnowa jest rzeczywistym reprezentantem układu odniesienia). Sposób zastosowania korekt *Hausbrandta* w układzie płaskim jest przedstawiony np. w *Wytycznych Technicznych G-1.10* (Kadaj, 2001). Tutaj mamy uogólnienie tych wzorów dla przypadku trójwymiarowego.

Jak widać ze struktury danych na rys. 3, punktami dostosowania transformacji są punkty osnowy, przy czym w układzie pierwotnym zrzutowane na geoidę EGM-2008 oraz a w układzie aktualnym (wtórnym) - na szukaną quasi-geoidę. Statystyczne wyniki tej transformacji ujmuje wyciąg z tabulogramu obliczeniowego programu TRANS_3D (tab. 1):

Tab. 1. Syntetyczne wyniki etapu 3 - transformacja modelu EGM-2008 na układ empirycznych anomalii wysokości reprezentowanych dyskretnie przez różnice wysokości elipsoidalnych w układzie ETRF'89 i normalnych w układzie Kronstadt'86.

Liczba punktów zbioru pierwotnego	=	347201
Liczba punktów zbioru wtórnego	=	400
Liczba punktów wspólnych (łącznych)	=	400
Liczba punktów transformowanych	=	346801
Ilość elementów nadwymiarowych układu	=	1196

Średniokwadratowe odchyłki współrzędnych w metrach:

$$\Delta x = 0.0184 \quad \Delta y = 0.0066 \quad \Delta z = 0.0242$$

[Największe odchyłki transformacji na kilku punktach sieci POLREF nie przekraczają 5 cm ale będą one uwzględnione w finalnym modelu poprzez wprowadzenie na punkty siatki lokalnych poprawek *Hausbrandta*]

PARAMETRY TRANSFORMACJI: [(XYZ)_{EGM-2008} ⇒ (XYZ)_{ETRF'89 (PL)}]

PARAMETRY TRANSLACJI (współrzędne środków ciężkości):

Xs1:= 3698911.98691; Ys1:= 1292365.10446; Zs1:= 5010434.36074; {układ pierwotny}

Xs2:= 3698912.01790; Ys2:= 1292365.11606; Zs2:= 5010434.40229; {układ wtórny}

MACIERZ S PRZEKSZTAŁCENIA:

$$\begin{bmatrix} 1.00000000899505E+0000 & 7.90729202884289E-0008 & -1.00968886226114E-0007 \\ -7.90729347487972E-0008 & 1.00000000899504E+0000 & -1.43216087575743E-0007 \\ 1.00968874901599E-0007 & 1.43216095559648E-0007 & 1.00000000899504E+0000 \end{bmatrix}$$

WZÓR TRANSFORMACJI

$$\begin{bmatrix} X_{\text{ETRF-89}} - X_{s2} \\ Y_{\text{ETRF-89}} - Y_{s2} \\ Z_{\text{ETRF-89}} - Y_{s2} \end{bmatrix} = S * \begin{bmatrix} X_{\text{EGM-2008}} - X_{s1} \\ Y_{\text{EGM-2008}} - Y_{s1} \\ Z_{\text{EGM-2008}} - Y_{s1} \end{bmatrix}$$

[kolorem niebieskim zaznaczono dodatkowe komentarze]

Wyniki te świadczą, że model geoidy EGM-2008, po określonych przekształceniach, nadspodziewanie dokładnie wpisuje się w polskie układy odniesienia, określone realnie przez sieci satelitarno-niwelacyjne EUVN, EUREF-POL i POLREF.

Dla celów dokumentacyjnych i kontrolnych modelu quasi-geoidy GEOIDPOL-2008 obliczono anomalie wysokości w węzłach siatki stopniowej, zarówno dla układu ETRF'89 (tab. 2) jak też (po trójwymiarowej transformacji) w układzie ETRF'2005 (stacje ASG-EUPOS).

Tab.2 . Anomalie wysokości modelu GEOIDPOL-2008 w układzie ETRF'89 na epokę 1989.0

Wysokości quasi-geoidy GEOIDPOL-2008 w układzie ETRF'89 na epokę 1989.0									
L°	B° = 48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°
13°	45.0730	46.8067	46.9063	44.5272	41.7803	39.4677	37.3750	36.3086	36.6671
14°	45.6406	46.9698	45.7038	43.4082	40.7989	37.5427	35.9667	34.7169	35.0967
15°	46.5773	46.1610	44.4904	42.5613	39.6339	35.8680	35.0893	34.5965	33.6472
16°	46.4272	46.0153	44.1219	42.1620	38.7510	34.3496	33.8288	33.4640	32.3635
17°	44.2617	43.4056	44.0492	40.8408	36.9810	33.3668	31.9558	32.0449	30.4030
18°	43.5251	43.2797	42.6320	39.3441	34.9493	31.2026	30.2925	30.0282	27.9605
19°	43.9760	43.3370	41.6443	38.0189	33.0547	29.9054	29.3432	27.9473	26.2415
20°	42.8643	43.0919	39.8581	36.6709	32.5061	30.7605	29.3612	26.8077	25.3543
21°	41.0274	40.7833	37.1916	35.9975	31.9941	30.5279	28.7888	26.0476	24.5882
22°	39.7138	38.4864	35.0880	33.8577	30.1512	29.1589	28.3107	25.5392	24.4203
23°	38.8749	36.6161	32.6669	30.8907	28.9435	28.1545	27.7351	25.3166	24.1395
24°	38.1416	32.4375	30.7938	29.2773	27.8642	28.0375	27.0139	24.9432	23.0996
25°	35.7835	32.2279	31.7907	29.5057	27.6213	26.9392	26.4980	24.5272	22.3735

Tab. 3. Anomalie wysokości modelu GEOIDPOL-2008 w układzie ETRF'2005 na epokę 2008.13

Wysokości quasi-geoidy GEOIDPOL-2008 w układzie ETRF'2005 na epokę 2008.13 (ASG-EUPOS)									
L°	B° 48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°
13°	45.0161	46.7572	46.8641	44.4922	41.7524	39.4468	37.3611	36.3015	36.6668
14°	45.5796	46.9162	45.6576	43.3693	40.7672	37.5181	35.9491	34.7063	35.0930
15°	46.5122	46.1034	44.4403	42.5185	39.5984	35.8397	35.0681	34.5824	33.6400
16°	46.3580	45.9538	44.0679	42.1154	38.7118	34.3177	33.8041	33.4464	32.3529
17°	44.1885	43.3401	43.9914	40.7905	36.9381	33.3313	31.9275	32.0239	30.3891
18°	43.4479	43.2103	42.5703	39.2899	34.9027	31.1634	30.2608	30.0038	27.9432
19°	43.8949	43.2637	41.5788	37.9611	33.0045	29.8627	29.3079	27.9194	26.2209
20°	42.7793	43.0148	39.7889	36.6094	32.4523	30.7143	29.3225	26.7764	25.3305
21°	40.9385	40.7024	37.1186	35.9323	31.9367	30.4782	28.7467	26.0130	24.5612
22°	39.6211	38.4017	35.0113	33.7889	30.0902	29.1058	28.2653	25.5013	24.3900
23°	38.7784	36.5277	32.5866	30.8183	28.8791	28.0979	27.6863	25.2755	24.1061
24°	38.0413	32.3454	30.7099	29.2014	27.7964	27.9776	26.9618	24.8989	23.0630
25°	35.6795	32.1322	31.7032	29.4263	27.5500	26.8759	26.4427	24.4797	22.3338

ETAP 4: Utworzenie finalnego modelu GEOIDPOL-2008 w układzie ETRF'89

Wynik etapu 3 w postaci zbioru współrzędnych geocentrycznych $(XYZ)_{\text{siatka-ETRF'89}}$ przekształcamy programem UNITRANS na współrzędne geodezyjne, gdzie wysokość elipsoidalna jest wysokością quasi-geoidy. Otrzymany zbiór niech ma więc nazwę symboliczną $(BL\zeta)_{\text{siatka-ETRF'89}}$.

Utworzony model quasi-geoidy ma rozdzielczość 1'. Ponieważ w wielu zadaniach praktycznych (na przykład w serwisie POZGEO systemu ASG-EUPOS) są stosowane modele o rozdzielczości zwiększonej do 0.01° więc ostateczny model quasi-geoidy zagęszcza się do tej rozdzielczości, jakkolwiek w praktyce nie ma to istotnego skutku numerycznego. Zmianę gęstości zrealizowano analogiczną metodą interpolacyjną jaką zastosowano w etapie 2 do interpolacji wysokości geoidy EGM-2008 dla punktów osnowy. W tym przypadku interpolacji podlegają punkty siatki o rozdzielczości $0.01^\circ \times 0.01^\circ$ „nałożonej” na siatkę o rozdzielczości 1' x 1'. Interpolację każdego węzła nowej siatki wykonano przez uwzględnienie węzłów siatki bazowej w kole o promieniu 6 km, i tak jak poprzednio, przy zastosowaniu wag odwrotnie proporcjonalnych do kwadratów odległości od węzła interpolowanego.

Rezultatem finalnym jest numeryczny model indeksowany w postaci

$$[i \quad j \quad \zeta_{ij} (\text{ETRF}'89)]$$

$$\text{dla } i = 0, 1, 2, \dots, 800; \quad j = 0, 1, 2, \dots, 1200$$

Współrzędne geodezyjne (B_i, L_j) węzłów (i, j) siatki są określone następująco:

$$B_i = 48^\circ + i * 0.01^\circ; \quad L_j = 13^\circ + j * 0.01^\circ$$

Liczba wszystkich węzłów siatki wynosi dokładnie 962001.

Z uporządkowanych w powyższy sposób węzłów siatki z odstępami quasi-geoidy od elipsoidy w układzie ETRF'89 na epokę 1989.0 utworzono bazę tekstową i binarną wykorzystywaną w programie GEOIDPOL_2008. Przy pominięciu wskaźników węzłów program automatycznie rozpoznaje jego lokalizację według kolejności zapisu w bazie. Przeliczenie anomalii do układu ETRF'2005 na epokę 2008.13 (ASG-EUPOS) następuje automatycznie za pomocą wewnętrznej procedury transformacyjnej.

3. Prognozowane wysokości normalne centrów geodezyjnych anten stacji referencyjnych ASG-EUPOS na podstawie modelu GEOIDPOL-2008.

W tabeli 4 podzielonej na części 1-2 podano, wyznaczone z modelu GEOIDPOL-2008 prognozowane wysokości normalne w układzie KRONSTADT'86 centrów geometrycznych anten na polskich stacjach referencyjnych systemu ASG-EUPOS. Dla kontroli zamieszczono także wysokości elipsoidalne i wysokości geoidy w dwóch układach odniesienia: ETRF'2005 na epokę 2008.13 (w tym układzie działają serwisy POZGEO i POZGEO-D ASG-EUPOS) oraz w układzie ETRF'89 na epokę 1989 (wyniki z transformacji pomiędzy układami). Dobrym testem modelu

GEOIDPOL-2008 będzie porównanie tych wysokości z wysokościami, które zostaną wyznaczone przez niwelację w nawiązaniu do państwowej osnowy wysokościowej.

Tab. 4 – Prognozowane według GEOIDPOL-2008 wysokości normalne dla stacji ASG-EUPOS, część 1

Nazwa STACJI	H ^{elips_05} ETRF'05 EP.2008.13 BAZA ASG-EUPOS	H ^{elips_89} ETRF'89 EP.1989.0	H ^{norm_K86} Kronstadt '86 PROGNOZA GEOIDPOL -2008	WYSOKOŚCI QUASI-GEOIDY W UKŁADACH		d ζ
				ζ (2005) ETRF'05	ζ (1989) ETRF'89	
BART	93.2459	93.2855	65.237	28.0089	28.0485	-0.0396
BIAL	191.4097	191.4658	163.329	28.0807	28.1368	-0.0561
BILG	242.9253	243.0004	209.554	33.3713	33.4464	-0.0751
BOR1	124.3784	124.4196	88.882	35.4964	35.5376	-0.0412
BPDŁ	196.3758	196.4404	167.677	28.6988	28.7634	-0.0646
BRAN	168.5255	168.5836	140.328	28.1975	28.2556	-0.0581
BUZD	299.3050	299.3733	262.252	37.0530	37.1213	-0.0683
BYDG	104.4427	104.4807	73.674	30.7687	30.8067	-0.0380
CBKA	125.2124	125.2683	94.055	31.1574	31.2133	-0.0559
CCHN	167.7388	167.7880	136.807	30.9318	30.9810	-0.0492
CHEL	255.5537	255.6267	226.367	29.1867	29.2597	-0.0730
CHOJ	204.0780	204.1103	173.172	30.9060	30.9383	-0.0323
CHOS	105.7516	105.7802	70.880	34.8716	34.9002	-0.0286
DRWP	171.1218	171.1493	136.632	34.4898	34.5173	-0.0275
DZIA	206.6011	206.6461	176.035	30.5661	30.6111	-0.0450
ELBL	52.7188	52.7543	23.609	29.1098	29.1453	-0.0355
GDAN	66.7254	66.7568	37.307	29.4184	29.4498	-0.0314
GIZY	166.8361	166.8805	138.518	28.3181	28.3625	-0.0444
GLOG	144.4462	144.4881	104.567	39.8792	39.9211	-0.0419
GNIE	172.1448	172.1859	138.872	33.2728	33.3139	-0.0411
GOLE	68.8761	68.8998	33.557	35.3191	35.3428	-0.0237
GRAJ	165.2164	165.2660	136.736	28.4804	28.5300	-0.0496
GRUD	70.5369	70.5751	41.546	28.9909	29.0291	-0.0382
GWWL	127.1570	127.1879	90.763	36.3940	36.4249	-0.0309
HAJN	196.6522	196.7127	168.386	28.2662	28.3267	-0.0605
HOZD	298.8514	298.9316	267.311	31.5404	31.6206	-0.0802
HRUB	234.4810	234.5580	204.942	29.5390	29.6160	-0.0770
ILAW	162.8384	162.8787	133.192	29.6464	29.6867	-0.0403
JLGR	408.2089	408.2552	365.730	42.4789	42.5252	-0.0463
KALI	147.7481	147.7969	111.787	35.9611	36.0099	-0.0488
KAMP	57.7648	57.7854	22.472	35.2928	35.3134	-0.0206
KATO	332.8999	332.9636	291.876	41.0239	41.0876	-0.0637
KEPN	220.2968	220.3488	181.765	38.5318	38.5838	-0.0520
KLCE	333.5799	333.6447	296.931	36.6489	36.7137	-0.0648
KLDZ	359.5665	359.6198	316.480	43.0865	43.1398	-0.0533
KLOB	301.6434	301.7017	263.066	38.5774	38.6357	-0.0583
KONI	157.1299	157.1756	124.047	33.0829	33.1286	-0.0457
KOSC	211.1452	211.1760	180.616	30.5292	30.5600	-0.0308
KOSZ	123.1809	123.2048	89.838	33.3429	33.3668	-0.0239
KRAW	267.1321	267.2007	227.245	39.8871	39.9557	-0.0686
KROS	347.5510	347.6294	311.637	35.9140	35.9924	-0.0784
KROT	186.2662	186.3130	148.564	37.7022	37.7490	-0.0468
KUTN	159.8768	159.9267	127.579	32.2978	32.3477	-0.0499
LAMA	187.0411	187.0828	157.700	29.3411	29.3828	-0.0417
LEGN	181.3494	181.3950	140.193	41.1564	41.2020	-0.0456
LELO	306.3189	306.3816	267.910	38.4089	38.4716	-0.0627
LESZ	149.6651	149.7076	111.123	38.5421	38.5846	-0.0425
LODZ	259.4364	259.4899	225.835	33.6014	33.6549	-0.0535
LOMZ	185.3691	185.4212	156.324	29.0451	29.0972	-0.0521
LUBL	242.2181	242.2869	210.362	31.8561	31.9249	-0.0688

Tab. 4. Prognozowane według GEOIDPOL-2008 wysokości normalne dla stacji ASG-EUPOS - część 2

Nazwa STACJI	H ^{elips_05} ETRF'05 EP.2008.13 BAZA ASG-EUPOS	H ^{elips_89} ETRF'89 EP.1989.0	H ^{norm_K86} Kronstadt '86 PROGNOZA GEOIDPOL - 2008	ζ(2005) ETRF'05	ζ(1989) ETRF'89	dζ
MILO	272.0112	272.0873	236.982	35.0292	35.1053	-0.0761
MIMA	200.7506	200.8086	170.346	30.4046	30.4626	-0.0580
MYSZ	169.3312	169.3792	139.485	29.8462	29.8942	-0.0480
NODW	125.7177	125.7707	94.343	31.3747	31.4277	-0.0530
NTML	126.6453	126.6825	89.861	36.7843	36.8215	-0.0372
NWSC	334.7730	334.8479	296.156	38.6170	38.6919	-0.0749
NWTG	646.7210	646.7944	605.702	41.0190	41.0924	-0.0734
NYSA	250.6085	250.6641	209.113	41.4955	41.5511	-0.0556
OPLA	225.9124	225.9687	185.584	40.3284	40.3847	-0.0563
OPLU	193.0104	193.0779	159.596	33.4144	33.4819	-0.0675
OSMZ	166.3343	166.3886	137.119	29.2153	29.2696	-0.0543
PILA	121.7520	121.7855	88.126	33.6260	33.6595	-0.0335
PITR	254.7767	254.8340	219.820	34.9567	35.0140	-0.0573
PROS	279.9386	280.0074	241.308	38.6306	38.6994	-0.0688
PRZM	293.7149	293.7960	260.202	33.5129	33.5940	-0.0811
RADM	218.8245	218.8873	184.709	34.1155	34.1783	-0.0628
REDZ	108.2754	108.3007	76.466	31.8094	31.8347	-0.0253
RWMZ	187.6358	187.6923	154.449	33.1868	33.2433	-0.0565
RYKI	204.1163	204.1799	172.087	32.0293	32.0929	-0.0636
SIDZ	190.0426	190.0950	154.484	35.5586	35.6110	-0.0524
SIED	202.0156	202.0763	172.767	29.2486	29.3093	-0.0607
SIPC	163.1779	163.2240	132.496	30.6819	30.7280	-0.0461
SOCH	133.9142	133.9672	102.035	31.8792	31.9322	-0.0530
SOKL	222.2499	222.3050	194.390	27.8599	27.9150	-0.0551
STRG	136.2778	136.3117	106.708	29.5698	29.6037	-0.0339
SWIB	132.0080	132.0436	93.838	38.1700	38.2056	-0.0356
SWKI	215.9562	216.0039	188.325	27.6312	27.6789	-0.0477
SZEK	193.9237	193.9531	161.019	32.9047	32.9341	-0.0294
TABG	214.7484	214.8194	179.524	35.2244	35.2954	-0.0710
TARG	358.4107	358.4722	317.687	40.7237	40.7852	-0.0615
TORU	118.3942	118.4354	88.456	29.9382	29.9794	-0.0412
TRNW	277.0879	277.1608	239.967	37.1209	37.1938	-0.0729
USDL	529.7608	529.8442	494.660	35.1008	35.1842	-0.0834
WAT1	151.6808	151.7358	120.330	31.3508	31.4058	-0.0550
WLBR	509.7625	509.8118	467.042	42.7205	42.7698	-0.0493
WLDW	210.9733	211.0432	182.567	28.4063	28.4762	-0.0699
WLOC	107.5803	107.6257	76.574	31.0063	31.0517	-0.0454
WODZ	298.8108	298.8742	256.752	42.0588	42.1222	-0.0634
WRKI	95.2933	95.3287	60.645	34.6483	34.6837	-0.0354
WROC	180.8376	180.8874	140.590	40.2476	40.2974	-0.0498
ZARY	203.8502	203.8888	163.157	40.6932	40.7318	-0.0386
ZIGR	225.6411	225.6790	186.102	39.5391	39.5770	-0.0379
ZYWI	412.7898	412.8586	370.837	41.9528	42.0216	-0.0688

4. Aplikacje modelu GEOIDPOL-2008

Model **GEOIDPOL-2008** zaimplementowano w dołączonym do niniejszej publikacji niezależnym programie **geoidpol_2008.exe** (rys.4) z bazowym plikiem binarnym **geoidpol_2008.bin** jak też w systemie **GEONET** w postaci pliku podprogramu **geoidpol.exe** (tutaj występują dodatkowe funkcje związane z niwelacją satelitarną, polegające na bezpośrednim przeliczaniu różnic wysokości elipsoidalnych na normalne lub odwrotnie).



Rys. 4. Okno programu **geoidpol_2008.exe** (program dołączony oddzielnie na stronie www.geonet.net.pl)

Aplikacja wymaga na wstępie opcjonalnego wyboru jednego z dwóch układów odniesienia, które obecnie mają w Polsce praktyczne zastosowanie :

- **ETRF'89 na epokę 1989.0** (ten układ dotyczy udostępnianych publicznie baz danych sieci **EUVN**, **EUREF-POL**, **POLREF** lub nawiązanych do tych sieci pomiarów **GNSS** oraz związanych z tymi pomiarami zadań niwelacji satelitarnych)

- **ETRF'2005 na epokę 2008.13** (ten układ dotyczy udostępnianych publicznie współrzędnych stacji referencyjnych systemu **ASG-EUPOS**, a więc wszelkich pomiarów nawiązanych do tych stacji w tym niwelacji satelitarnych, przy wykorzystaniu serwisów **POZGEO** i **POZGEO-D**

Należy podkreślić, że wybór właściwego układu jest kwestią bardzo istotną, gdyż jak wynika z przykładu ilustrowanego już rys. 1, średnia różnica wysokości elipsoidalnych pomiędzy tymi układami wynosi ok. 5 cm, co ma tej miary skutki w zadaniach wykorzystujących model quasi-geoidy.

Aplikacja pozwala wykonywać następujące operacje na zadanych zbiorach tekstowych (mówimy inaczej, że w trybie wsadowym):

1) **Wyznaczenie wysokości (anomalii) quasi-geoidy** dla dowolnie licznego zbioru punktów o zadanych współrzędnych geodezyjnych B,L. Używając oryginalnych nazw zbioru wejściowego **BL** i wynikowego **BLN** zapisujemy przekształcenie w postaci

$$BL \Rightarrow BLN$$

2) **Przeliczenie wysokości elipsoidalnych na normalne** w układzie **Kronstadt'86** lub zadanie odwrotne (oczywiście, przy udziale współrzędnych pozycyjnych B, L):

$$BLH_e \Leftrightarrow BLH_n$$

Zadanie niwelacji satelitarnej polegające na przeliczeniu różnic wysokości elipsoidalnych na odpowiadające różnice wysokości normalnych występuje jako opcja dodatkowa w systemie **GEONET**. Zbiór wejściowy do programu uzyskuje się innymi podprogramami systemu **GEONET** w module GPS. Szczegółowy opis zadań i struktury zbiorów danych zawiera opis wewnętrzny dostępny w panelu **INFO** z okna podprogramu.

5. Ocena jakościowa modelu GEOIDPOL-2008

Podstawowym testem kontrolnym programu jest sprawdzenie wartości odstępów quasi-geoidy w punktach osnowy **EUVN+EUREF-POL+POLREF** wykorzystanych do tworzenia modelu. Stosownie do danych źródłowych wybrano opcję układu **ETRF'89**. Syntetyczne wyniki porównania z oryginalnymi wartościami wynikającymi z różnic wysokości elipsoidalnych i wysokości niwelacyjnych (normalnych) ujmują tabela 5:

Tab. 5. Test sieci podstawowej

SIEĆ EUVN + EUREF-POL + POLREF

Liczba punktów wspólnych	n = 400
Najmniejsza odchyłka	d _ζ min = -0.0120 m
Największa odchyłka	d _ζ max = 0.0010 m
Średnia odchyłka	SUMA(d _ζ)/n = -0.0003 m (miara błędu systematycznego)
Średniokwadratowa odchyłka	= 0.0034 m (miara dyspersji)

Wyniki świadczą, że model quasi – geoidy został wpasowany w osnowę z precyzją wyższą niż szacowane dokładności wyznaczeń wysokości, a odchyłka średnia nie wykazuje błędu systematycznego. Fakt ten potwierdza jednak głównie zgodność algorytmów i ich aplikacji z założeniem, że testowana osnowa pełni zasadniczą funkcję w kształtowaniu przebiegu quasi-geoidy ale nie weryfikuje jej przebiegu w obszarach pomiędzy punktami tej osnowy.

Drugi test odnosi się więc do pomiarów nie związanych z konstrukcją modelu quasi-geoidy. Jest to przykład niwelacji punktów precyzyjnej sieci realizacyjnej założonej dla budowy autostrady **A-1** w pobliżu Łodzi. Sieć wektorowa GPS złożona z **82** punktów wyznaczanych była nawiązana wyłącznie do stacji referencyjnych **KUTN, LODZ, Pitr, SIDZ, RWMZ**, natomiast niwelacja punktów sieci GPS do 9 reperów podstawowej osnowy wysokościowej. Na podstawie oceny jakościowej pomiarów można mieć przekonanie o precyzji milimetrowej rzeczywistych pomiarów wysokościowych całości osnowy (błąd średni wyrównanych wysokości normalnych nie przekracza **5 mm**, natomiast wyznaczenia poziome oraz wysokości elipsoidalnych charakteryzują się błędami średnimi współrzędnych (rzędnych) mniejszymi od **10 mm**. Potwierdzają to raporty wyrównań sieci trójwymiarowej oraz niezależnego wyrównania wysokości elipsoidalnych. Obliczone z pomiarów różnice wysokości elipsoidalnych i normalnych porównano z odpowiadającymi wartościami odstępów wyznaczonymi z modelu **GEOIDPOL-2008** (wobec nawiązań do stacji **ASG-EUPOS** układem odniesienia był **ETRF'2005 na epokę 2008.13**). Syntetyczne wyniki porównania ujmuje tabela 6:

Tab. 6. Test specjalnej sieci realizacyjnej

SIEĆ REALIZACYJNA ODCINA AUTOSTRADY A1

Liczba punktów wspólnych	$n = 87$	
Najmniejsza odchyłka	$d_{\zeta\min} = -0.0130$	m
Największa odchyłka	$d_{\zeta\max} = 0.0250$	m
Średnia odchyłka	$SUMA(d_{\zeta})/n = 0.0046$	m (miara błędu systematycznego)
Średniokwadratowa odchyłka	$S = 0.0077$	m (miara dyspersji)

Powyższe charakterystyki świadczą, że różnice wysokości quasi-geoidy wyznaczone niezależnie z pomiarów i z modelu **GEOIDPOL-2008** mieszczą się w szacowanym poziomie błędu pomiarowego (nie identyfikuje się w tym obszarze błędu systematycznego modelu quasi-geoidy).

Kolejny przykład dotyczy osnowy szczegółowej **III klasy** w gminie **Dęblin w powiecie Ryckim**. W tym przypadku **51** punktów sieci wektorowej **GPS** jest dowiązanych do stacji referencyjnej **RYKI** i **5** punktów poziomej osnowy **klasy I+II**. Zadanie płaskie sprowadzono do wyrównania sieci w układzie **1992**, natomiast określenie wysokości normalnych w układzie **Kronstadt'86** oparto na niwelacji geometrycznej nawiązanej do **8** reperów państwowej osnowy wysokościowej (sieć niwelacyjna obejmowała łącznie **259** punktów połączonej sieci GPS i klasycznej). Błędy średnie wyznaczeń wysokości normalnych przy założeniu stałości reperów nawiązania nie przekraczały **7 mm**. Można też powiedzieć, że wyrównana sieć jest dostatecznie niezawodna. Niestety, wyznaczenie samych wysokości elipsoidalnych jest obarczone pewnym ryzykiem, ponieważ wynika ono z nawiązania do jednej stacji referencyjnej (**RYKI**) ale biorąc pod uwagę to, że jest to stacja **ASG-EUPOS** o wielokrotnie sprawdzonych współrzędnych geocentrycznych, o dokładności sub-milimetrowej (w układzie **ETRF'2005 na epokę 2008.0**), więc samo nawiązanie jest „godne” zaufania. Przy porównaniu empirycznych wysokości geoidy

wyznaczonych różnic wysokości elipsoidalnych i normalnych z wielkościami odstępów interpolowanymi z modelu quasi-geoidy musimy uwzględnić dodatkowo wewnętrzną dokładność samej sieci wektorowej GPS (głównie w składowej pionowej), której warunki techniczne nie były zbyt „wygórowane” z uwagi zastosowanie tylko do osnowy szczegółowej **III klasy**. Z syntezy wyników podanych w tabeli 6 widać, że średnie odchylenie modelu quasi-geoidy **GEOIDPOL-2008** wynoszące **-13 mm** mieści się w zakresie standardu dokładnościowego pomiarów GPS i niekoniecznie musi być przypisane całkowicie do modelu.

Tab 7. Test dla osnowy III klasy

SIEĆ III KLASY - DĘBLIN

Liczba punktów wspólnych	n = 51
Najmniejsza odchyłka	$d\zeta_{\min} = -0.035$ m
Największa odchyłka	$d\zeta_{\max} = 0.011$ m
Średnia odchyłka	$SUM(d\zeta)/n = -0.013$ m (miara błędu systematycznego)
Średniokwadratowa odchyłka	$S = 0.016$ m (miara dyspersji)

Powyższa ocena dokładnościowa jest oczywiście ograniczona ze względu na ograniczenia publikacji ale dołączony do publikacji program posłuży zapewne także do innych analiz i porównań.

Opracowanie i program GEOIDPOL-2008 wykonano w firmie ALGORES-SOFT w Rzeszowie. Podziękowania należą się dla *mgr inż. Tomasza Świętonia* za techniczne przygotowanie siatki modelu EGM-2008 dla obszaru Polski.

Literatura

Hirt C., (2011): *Assessment of EGM2008 over Germany using accurate quasigeoid heights from vertical deflections, GCG05 and GPS/levelling.* Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement (zfv) 136(3): 138-149.

Kadaj R.,(2001a): *Weryfikacja wyznaczenia modelu geoidy niwelacyjnej 2001 poprzez zastosowanie innej metody modelowania numerycznego i porównanie wyników. Model numeryczny geoidy niwelacyjnej wraz z programem GEOIDPOL-2001.* Raport techniczny z realizacji umowy nr 25/2001/GD z GUGiK., Warszawa 2001.

Kadaj R., (2001b): *Formuły odwzorowawcze i parametry układów współrzędnych.* Wytyczne Techniczne G-1.10 (załącznik – program TRANSPOL). GUGiK, Warszawa, 2001, ISBN-83-239-1473-7

Kadaj R., Świętoń T., (2008): *Oprogramowanie i opis modułu automatycznego postprocessingu APPS w wersjach 2.03 – 3.01 (2008-2011) dla serwisu POZGEO w polskim systemie stacji referencyjnych ASG-EUPOS,* Wykonano dla GEOTRONICS – Polska Sp. z o.o., jako wykonawcy projektu GUGiK w Warszawie.

Kryński J., (2007): *Precyzyjne modelowanie quasigeoidy na obszarze Polski – wyniki i ocena dokładności.* Warszawa, IGIK, 2007, ISBN: 978-83-60024-11-9

Kryński J., Kloch-Główka G., (2009): *Evaluation of the Performance of the New EGM2008 Global Geopotential Model over Poland.* Geoinformation Issues, Vol. 1, No 1, 7-17/2009

Łyszkowicz A., (1993): *The Geoid for the Area of Poland.* Artificial Satellites, Vol. 28, No 2, Planetary Geodesy, No 19, 1993, pp 75-150.

Łyszkowicz A., Forsberg R., (1995): *Gravimetric Geoid for Poland Area Using Spherical FFT,* Artificial Satellites, Vol. 29, No 1, Planetary Geodesy No 21, pp1-11.

Łyszkowicz A., (1997): *System obliczania odstępów quasigeoidy model QUASI96 od elipsoidy GRS80 dla obszaru Polski.* Sprawozdanie techniczne z realizacji umowy nr 38/CBK/97 pomiędzy GUGiK a CBK PAN.

Łyszkowicz A., (2000): *Improvement of the quasigeoid model in Poland by GPS and levelling data.* Artificial Satellites, Journal of Planetary Geodesy. Vol. 35, No 1, pp. 3-8

Osada E., (2001): *Wyznaczenie modelu geoidy niwelacyjnej QGEOID' PL01 i modelu odchyłeń pionu DEFLEC'01 na podstawie pomiarów satelitarnych i pomiarów wysokościowych osnowy geodezyjnej.* Raport techniczny z realizacji umowy nr 1/2001/GD z GUGiK. Warszawa 2001.

Pażus R., Osada E., Olejnik S., (2002): *Geoida niwelacyjna 2001,* Magazyn Geoinformacyjny GEODETA, Nr 5(84), maj 2002

Pavlis N.K.; Holmes S.A. Kenyon S.C., Factor J.K., (2008a): *The EGM2008 Global Gravitational Model.* American Geophysical Union, Fall Meeting 2008.

Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K., (2008b): *An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008,* EGU General Assembly 2008, Geophysical Research Abstracts, Vol. 10, EGU2008-A-01891.

Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K., (2011): *The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008).* Journal of Geophysical Research, Vol. 117, B04406, 38pp.,2012 (doi: 10.1029/2011JB008916).

Ryczywolski M. (2011): *Układ odniesienia stacji referencyjnych ASG-EUPOS.* Mat. Konf. Szkoleniowej, Zegrze, 28-29 listopada 2011 r. Departament Geodezji, Kartografii i Systemów Informacji Geograficznej GUGiK.

Inne źródła:

Podzbiór bazy danych GUGiK (wg specyfikacji pismem z dnia 25.01.2007, L.dz. DOP/10130/2007)

Materiały informacyjne National Geospatial-Intelligence Agency (USA)
http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/egm08_wgs84.html

Wykorzystane programy obliczeniowe: GEONET_2006 – system geodezyjny © ALGORES-SOFT www.geonet.net.pl:

Załącznik 1. Przekształcenia współrzędnych geocentrycznych pomiędzy podstawowymi układami odniesienia stosowanymi obecnie w technologiach geodezyjnych w Polsce.

Przekształcenie (XYZ)_{ETRF'89 ep.1989.0} ⇒ (XYZ)_{ETRF'2005 ep. 2008.13}

$$\begin{bmatrix} X_{\text{ETRF}'2005} \\ Y_{\text{ETRF}'2005} \\ Z_{\text{ETRF}'2005} \end{bmatrix} = S * \begin{bmatrix} X_{\text{ETRF}'89} - X_{s1} \\ Y_{\text{ETRF}'89} - Y_{s1} \\ Z_{\text{ETRF}'89} - Z_{s1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{s2} \\ Y_{s2} \\ Z_{s2} \end{bmatrix}$$

PARAMETRY TRANSLACJI (WSPÓLRZĘDNE ŚRODKÓW CIĘŻKOŚCI)

Xs1:= 3704270.71083; Ys1:= 1311157.21633; Zs1:= 5002076.05915; {układ pierwotny}
 xs2:= 3704270.68753; Ys2:= 1311157.19192; Zs2:= 5002076.01730; {układ wtórny}

MACIERZ **S** PRZEKSZTALCENIA:

$$\begin{bmatrix} 9.99999950089571\text{E}-0001 & -1.38486853315510\text{E}-0008 & 4.72092697099261\text{E}-0008 \\ 1.38486818991150\text{E}-0008 & 9.99999950089569\text{E}-0001 & 7.27068187473307\text{E}-0008 \\ -4.72092707168199\text{E}-0008 & -7.27068180935444\text{E}-0008 & 9.99999950089568\text{E}-0001 \end{bmatrix}$$

Przekształcenie odwrotne

(XYZ)_{ETRF'2005 ep.2008.13} ⇒ (XYZ)_{ETRF'89 ep. 1989.0}

$$\begin{bmatrix} X_{\text{ETRF}'89} \\ Y_{\text{ETRF}'89} \\ Z_{\text{ETRF}'89} \end{bmatrix} = S * \begin{bmatrix} X_{\text{ETRF}'2005} - X_{s1} \\ Y_{\text{ETRF}'2005} - Y_{s1} \\ Z_{\text{ETRF}'2005} - Z_{s1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{s2} \\ Y_{s2} \\ Z_{s2} \end{bmatrix}$$

PARAMETRY TRANSLACJI (WSPÓLRZĘDNE ŚRODKÓW CIĘŻKOŚCI)

Xs1:= 3704270.68753; Ys1:= 1311157.19192; Zs1:= 5002076.01730; {układ pierwotny}
 xs2:= 3704270.71083; Ys2:= 1311157.21632; Zs2:= 5002076.05915; {układ wtórny}

MACIERZ **S** PRZEKSZTALCENIA:

$$\begin{bmatrix} 1.00000004992159\text{E}+0000 & 1.38402488564894\text{E}-0008 & -4.72406301357735\text{E}-0008 \\ -1.38402522919020\text{E}-0008 & 1.00000004992159\text{E}+0000 & -7.27215708141273\text{E}-0008 \\ 4.72406291292888\text{E}-0008 & 7.27215714679494\text{E}-0008 & 1.00000004992159\text{E}+0000 \end{bmatrix}$$